

因果関係の科学 偶然と必然



原 信一郎

まちなかカフェ

2015年3月4日

人類最大の発見

偶然

偶然を理解すること

偶然は理解できない

偶然を理解することは、
偶然が理解できない、
ということを理解することである。

第1章 確率

誕生日が同じ確率

【問題 1】 40 人のクラスで、同じ誕生日の人が 1 組以上いる確率は？

誕生日が同じ確率

【問題1】 40人のクラスで、同じ誕生日の人が1組以上いる確率は？

【解答】

2人の誕生日が食い違う確率は $\frac{364}{365}$

3人の誕生日が食い違う確率は $\frac{364}{365} \times \frac{363}{365}$

4人の誕生日が食い違う確率は $\frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365}$

...

40人の誕生日が食い違う確率は

$$\frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \times \cdots \times \frac{326}{365} \doteq 0.109$$

よって、少なくとも1人一致する確率は、 $1 - 0.109 = 0.891$

誕生日が同じ確率

【問題1】40人のクラスで、同じ誕生日の人が1組以上いる確率は？

【解答】

2人の誕生日が食い違う確率は $\frac{364}{365}$

3人の誕生日が食い違う確率は $\frac{364}{365} \times \frac{363}{365}$

4人の誕生日が食い違う確率は $\frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365}$

...

40人の誕生日が食い違う確率は

$$\frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \times \cdots \times \frac{326}{365} \doteq 0.109$$

よって、少なくとも1人一致する確率は、 $1 - 0.109 = 0.891$

誕生日が一致する人がいる確率 (中段) 自分と誕生日が一致する確率 (下段)

10人	20人	30人	40人	50人	60人	70人	80人
0.117	0.411	0.706	0.891	0.970	0.994	0.999	1.000
0.024	0.051	0.076	0.101	0.126	0.149	0.172	0.195

当たりか外れかどちらかだから…

【問題2】袋の中にくじが、当たりが1本、外れが2本入っている。1本取り出して当たりである確率は？

当たりか外れかどちらかだから…

【問題2】 袋の中にくじが、当たりが1本、外れが2本入っている。1本取り出して当たりである確率は？

【解答】 当たりか外れか二つに一つよって、 $\frac{1}{2}$

当たりか外れかどちらかだから…

【問題2】 袋の中にくじが、当たりが1本、外れが2本入っている。1本取り出して当たりである確率は？

【解答】 当たりか外れか二つに一つよって、 $\frac{1}{2}$ (←誤答)

【解答】 $\frac{1}{3}$

姉妹

【問題3】 ある人に二人の子供がいる。上の子が女の子だと
して、下の子女の子である確率はいくつか？

姉妹

【問題3】 ある人に二人の子供がいる。上の子が女の子だと
して、下の子女の子である確率はいくつか？

【解答】 $\frac{1}{2}$

姉妹

【問題3】 ある人に二人の子供がいる。上の子が女の子だとして、下の子女の子である確率はいくつか？

【解答】 $\frac{1}{2}$

【問題4】 ある人に二人の子供がいる。どちらが女の子だとして、もう一人も女の子である確率はいくつか？

姉妹

【問題3】 ある人に二人の子供がいる。上の子が女の子だとして、下の子女の子である確率はいくつか？

【解答】 $\frac{1}{2}$

【問題4】 ある人に二人の子供がいる。どちらが女の子だとして、もう一人も女の子である確率はいくつか？

【解答】 $\frac{1}{3}$ なぜなら…

姉妹

【問題3】 ある人に二人の子供がいる。上の子が女の子だと
して、下の子女の子である確率はいくつか？

【解答】 $\frac{1}{2}$

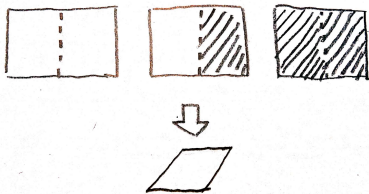
【問題4】 ある人に二人の子供がいる。どちらが女の子だと
して、もう一人も女の子である確率はいくつか？

【解答】 $\frac{1}{3}$ なぜなら…

上下	女女	女男	男女	男男
----	----	----	----	----

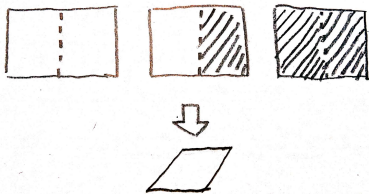
白白、白黒、黒黒のカードの問題

【問題5】表裏が、白白、白黒、黒黒である3枚のカードから、1枚取って、机の上に置いた。このとき表が白であったとする。裏も白である確率を求めなさい。



白白、白黒、黒黒のカードの問題

【問題5】表裏が、白白、白黒、黒黒である3枚のカードから、1枚取って、机の上に置いた。このとき表が白であったとする。裏も白である確率を求めなさい。



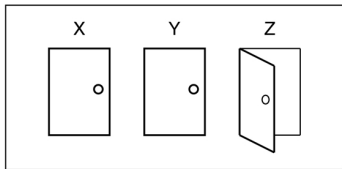
【解答】 $\frac{2}{3}$ なぜなら…

表	白 ₁	白 ₂	白	黒	黒 ₁	黒 ₂
裏	白 ₂	白 ₁	黒	白	黒 ₂	黒 ₁

モンティ・ホール問題

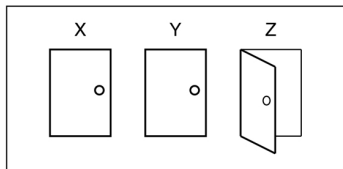
【問題6】あるテレビ番組の話。客は、プレゼントを隠した3つのドアを見せられる。1つのドアの後ろには車（当たり）があり、他の2つのドアにはヤギがいる。客は、それぞれのドアの後ろに何があるか知らないが、モンティは知っている。

客が1回目のドアの選択をした後、モンティは他の2つのドアのうちヤギが居る方を開けて見せる。更に客に、初めの選択のままでよいか、もう一方の閉じているドアに変更するか2回目の選択をさせる。客は、ドアを変更すべきだろうか？



モンティ・ホール問題 (解決編)

【解答 1】 客が選んだ扉を X、他の扉を Y、Z とする。X が当たりである確率だけに注目する。モンティは必ず Y か Z を開けるのだから、どちらを開けたとしても、X が当たりである確率は変わらず、 $\frac{1}{3}$ である。よって、Y が開けられたときの X が当たりである確率は、 $\frac{1}{3}$ であり、Z が当たりである確率は $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ である。

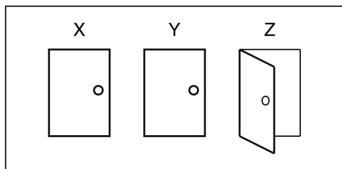


モンティ・ホール問題 (解決編)

【解答2】客が選んだ扉をX、他の扉をY、Zとする。客がドアを必ず変更するという戦略の下で、当たる確率は？

当たりの扉	モンティの開ける扉	客が開ける扉	確率
X	Y	Z	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$
	Z	Y	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$
Y	Z	Y	$\frac{1}{3}$
Z	Y	Z	$\frac{1}{3}$

よって、扉を変更すれば、当たる確率は下の2段の和で、 $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ である。



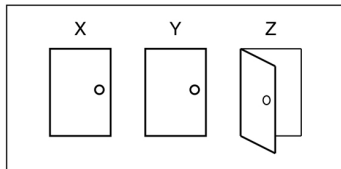
モンティ・ホール問題 (解決編)

【解答3】 (事象の独立性の利用) Xが当たりであるとき、Yが開けられる確率は $\frac{1}{2}$ である。また、Xが当たりでないとき、Yが開けられる確率は $\frac{1}{2}$ である。

つまり、Xが当たりである事と、Yが開けられる事は独立である。

よって、Xが当たりである確率は、Yが開けられたときのXが当たりである確率に等しく、 $\frac{1}{3}$ である。

よって、Yが開けられたときのZが当たりである確率は、 $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ である。



丁と半の話

【問題7】サイコロを2つ投げる。出た目の和が丁(偶数)である確率と半(奇数)である確率は等しい。その理由は？

丁と半の話

【問題7】サイコロを2つ投げる。出た目の和が丁(偶数)である確率と半(奇数)である確率は等しい。その理由は？

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

丁と半の話

【問題7】サイコロを2つ投げる。出た目の和が丁(偶数)である確率と半(奇数)である確率は等しい。その理由は？

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9

丁と半の話

【問題7】 サイコロを2つ投げる。出た目の和が丁 (偶数) である確率と半 (奇数) である確率は等しい。その理由は？

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9

【問題8】 出た目の和が3で割り切れる確率は？

丁と半の話

【問題7】サイコロを2つ投げる。出た目の和が丁(偶数)である確率と半(奇数)である確率は等しい。その理由は？

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9

【問題8】出た目の和が3で割り切れる確率は？ 同様に $\frac{1}{3}$

第2章 宝くじ

宝くじ

【問 1】 100 本のくじがあり 1 本が当たりである。このうち 1 本を選んで当たる確率は？

宝くじ

【問 1】 100 本のくじがあり 1 本が当たりである。このうち 1 本を選んで当たる確率は？ 【答】 $\frac{1}{100}$

宝くじ

【問 1】 100 本のくじがあり 1 本が当たりである。このうち 1 本を選んで当たる確率は？ 【答】 $\frac{1}{100}$

【問 2】 100 本のくじがありそのうち 1 本が当たりである。最初に A さんが 1 本を選び、次に B さんが 1 本を選ぶ。B さんが当たる確率はいくつか？

宝くじ

【問 1】 100 本のくじがあり 1 本が当たりである。このうち 1 本を選んで当たる確率は？ 【答】 $\frac{1}{100}$

【問 2】 100 本のくじがありそのうち 1 本が当たりである。最初に A さんが 1 本を選び、次に B さんが 1 本を選ぶ。B さんが当たる確率はいくつか？ 【答】 $\frac{1}{100}$

宝くじ

【問 1】 100 本のくじがあり 1 本が当たりである。このうち 1 本を選んで当たる確率は？ 【答】 $\frac{1}{100}$

【問 2】 100 本のくじがありそのうち 1 本が当たりである。最初に A さんが 1 本を選び、次に B さんが 1 本を選ぶ。B さんが当たる確率はいくつ？ 【答】 $\frac{1}{100}$

【説明 1】 最初に A さんに当てられてしまうかもしれないが、もし外したら B さんが当てる確率は上がって、うまいこと相殺される。

宝くじ

【問 1】 100 本のくじがあり 1 本が当たりである。このうち 1 本を選んで当たる確率は？ 【答】 $\frac{1}{100}$

【問 2】 100 本のくじがありそのうち 1 本が当たりである。最初に A さんが 1 本を選び、次に B さんが 1 本を選ぶ。B さんが当たる確率はいくつ？ 【答】 $\frac{1}{100}$

【説明 1】 最初に A さんに当てられてしまうかもしれないが、もし外したら B さんが当てる確率は上がって、うまいこと相殺される。

【説明 2】 A さんには最初に引いたくじを見ないでもらって、先に B さんが見たとすれば、B さんが最初に引いたと思える。

宝くじ

【問1】100本のくじがあり1本が当たりである。このうち1本を選んで当たる確率は？【答】 $\frac{1}{100}$

【問2】100本のくじがありそのうち1本が当たりである。最初にAさんが1本を選び、次にBさんが1本を選ぶ。Bさんが当たる確率はいくつ？【答】 $\frac{1}{100}$

【説明1】最初にAさんに当てられてしまうかもしれないが、もし外したらBさんが当てる確率は上がって、うまいこと相殺される。

【説明2】Aさんには最初に引いたくじを見ないでもらって、先にBさんが見たとすれば、Bさんが最初に引いたと思える。

【説明3】AとBさんがでたらめに2本のくじを引くとして良い。結局、Bさんだけに限ってもデタラメに決められている。

第3章 期待値

期待値

期待値とは得られる値の概算である。

【例】さいころを投げ、出た目が「2以下」か「3以上」を賭ける。当たれば掛け金は2倍になり、外れればすべて失う。

① 300円を「3以上」に賭けたときの期待値は？

期待値

期待値とは得られる値の概算である。

【例】さいころを投げ、出た目が「2以下」か「3以上」を賭ける。当たれば掛け金は2倍になり、外れればすべて失う。

① 300円を「3以上」に賭けたときの期待値は？

【答】 $600 \times \frac{2}{3} = 400$ 円

期待値

期待値とは得られる値の概算である。

【例】さいころを投げ、出た目が「2以下」か「3以上」を賭ける。当たれば掛け金は2倍になり、外れればすべて失う。

- ① 300円を「3以上」に賭けたときの期待値は？

【答】 $600 \times \frac{2}{3} = 400$ 円

- ② 「2以下」に100円、「3以上」に200円と賭けたときに期待値は？

期待値

期待値とは得られる値の概算である。

【例】さいころを投げ、出た目が「2以下」か「3以上」を賭ける。当たれば掛け金は2倍になり、外れればすべて失う。

- ① 300円を「3以上」に賭けたときの期待値は？

【答】 $600 \times \frac{2}{3} = 400$ 円

- ② 「2以下」に100円、「3以上」に200円と賭けたときに期待値は？

【答】 $200 \times \frac{1}{3} + 400 \times \frac{2}{3} \cong 333$ 円

期待値

期待値とは得られる値の概算である。

【例】さいころを投げ、出た目が「2以下」か「3以上」を賭ける。当たれば掛け金は2倍になり、外れればすべて失う。

- ① 300円を「3以上」に賭けたときの期待値は？

【答】 $600 \times \frac{2}{3} = 400$ 円

- ② 「2以下」に100円、「3以上」に200円と賭けたときに期待値は？

【答】 $200 \times \frac{1}{3} + 400 \times \frac{2}{3} \cong 333$ 円

(注) もちろん、確率の大きい方に全額賭けるのが良い。

- 1 300 円の宝くじの期待値は？

- ① 300 円の宝くじの期待値は？
【答】 143 円くらい。

期待値

① 300 円の宝くじの期待値は？

【答】 143 円くらい。

② 連番で賭けたときと、バラに賭けたときの期待値の違いは？

期待値

① 300 円の宝くじの期待値は？

【答】 143 円くらい。

② 連番で賭けたときと、バラに賭けたときの期待値の違いは？

【答】 変わらない。

期待値

- ① 300 円の宝くじの期待値は？

【答】 143 円くらい。

- ② 連番で賭けたときと、バラに賭けたときの期待値の違いは？

【答】 変わらない。

【解説】 1 番目に引いたくじの期待値は、連番もバラも等しい。2 番目に以降に引いたくじの期待値は、1 番目に引いたくじの期待値に等しい。よって、どんな場合でも期待値は変わらない。獲得金額の期待値は、それぞれの期待値の和なので等しい。

第4章 バイアス

—偶然をめぐる錯誤—

バイアスとは

人間は、ストーリー（物語）を好む。物語の無いところには、感情移入ができないばかりか、認識さえできない。一方で、偶然とは、全く煮ても焼いても食えないものであって、ストーリー性が完全に欠けている。

人は、偶然に出会うと、あらかじめ用意したストーリーに沿わせ、そこに偶然を見ないようにする。そのようなバイアス（傾向付け・偏見）として、4つ例を挙げる。

- ① 平均への回帰 ... 特殊は平凡に向かう
- ② 可用性バイアス ... 目立つものだけを拾う
- ③ 確証バイアス ... 自分の主張を肯定する
- ④ 後知恵バイアス ... 過去を予言する

平均への回帰

平均への回帰とは、めったに起こらない事の次には(も)良く起こる事が起こるという数学的性質。(厳密にはバイアスとは呼ばない。)

【例】

- ① 生徒がひどい成績を取ったのでしごいたら良くなった
- ② 美人の結婚相手は普通の人
- ③ 親が身長 2m もあるとその子供はそれより低い

可用性バイアス

可用性バイアス (Availability Bias) とは、過去を想起する時、最も生き生きした記憶や回想しやすい記憶を重要視してしまうという心理的錯誤。

【例】

- ① 私は雨女
- ② 占いが当たった
- ③ ある特殊な経験をしての結論…女は強い

確証バイアス

確証バイアス (Confirmation Bias) とは、先入観に基づいて事象を観察し、自分に都合のいい情報だけを集めて、それにより自己の主張を補強するという心理的錯誤。

【例】

- ① 同じ薬でも高い値段をつけた方が良く効く
- ② 有名な先生に占ってもらったら良く当たった
- ③ 予想を外した事例の無視

後知恵バイアス

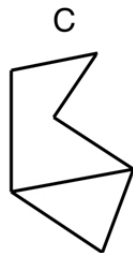
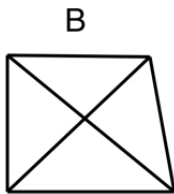
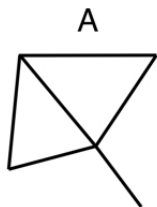
後知恵バイアス (Hindsight Bias) とは、出来事が起きた後になって、複数の予測の中から特定のの一つを選び、初めから予測できた、あるいは、必然であったかのように思うという心理的錯誤。

【例】

- ① 某解説者の、試合で勝利したときの選手起用についての解説
- ② 「そうだった！」
- ③ 心配性の人の子心配

法則の発見

オイラーの定理



	点	線	面	
A				
B				
C				

共起関係と因果関係

共起関係と因果関係

共起関係とは、一方の現象が起こるとき一方も同時に起こる、という現象。共起関係は、因果関係と誤解されやすい。

【例】

- ① このパンツをはいたとき、一日ラッキーだった→このパンツをはくとラッキーだ
- ② 大火事ではたくさんの消防車を取り囲む→たくさんの消防車が火事を大きくする
- ③ パトカーが来ると救急車も来る→事故という共通の原因を持つ

第5章 インケツ理論

【問題】 コインを何回か投げて賭けをする。最初7回裏が出た。8回目はどちらに賭ける？

運・不運1年目

O O O O O X X O O O X O X X X O X X X O O O X O O X O X X O O X X O
X X O X X X O X O O X X O O X O O O O O X X X X O X X O X O X X X O
O X X X X O O O O O O O O X X X X O X O O O O X X O O X O X O O X O
X O X X O O X X O O X X O O X O X O X O O X X X O X X X X O X O X X
O X O X X X O O X X X X X X O X O X O X O X X X X O O O X X O O O X
X X X O O O X X X X O X X X X X X O O O O X X O X O X X X X O O O X
O X X O O X O X X O O O O O O X O X X O O X X X O X O O O O X O O X
X O O O X X X O X O X O O X O X X X O O O X X X X X O O X X X O O O
O O X O X X O O X X X X X O O O X X O X O X X O O O X O X O X O X O
O X O O O X O O X X X O O O X O X X O X X O O X O O X O X X O X O X
X X O O O X X O X X X O O X X X X O O O O O O X X

運・不運2年目

X X X X X X X X O O X X X O X X X X X O O O X X O X X X O O O X X O
X O X X O X X X O O X X O O X O O X X O O O X X X O X O O O X X X X
X X X X X O O O O O O X O O O O O X O X O O O O X X X O O X O O O
O O X O O X X X X X X X X O X X O O O O O O O X X O O X X X X X O O
O O O O X X O X X X O O O X X X O X O O O O X O X O O X O X X O O X
O X O O X O O X X X X O O X O O X X X X O X O X X X O X O O O O X X
O X X X O X X O X O O X O O O O O X X O O X O X O X X O X X X O O O
X O X X X X O O O O O O O X O X O X O O O X X O X O O X O O O X X X
X X O O O O O O X X O O O O O O O O O X O O X X X X O O X O O X O
X O O O O X X X X O O O O X X O O O O X O O X O O O O O X X O X X
O X X X X X X O X O X X X O O O X O O X O X X X X X O O

運・不運3年目

XXXXXXXXXX000000X000X00X000X0X000XXXXX0X00
00X0XX000000X0X00000X0000XX0X00XX00
000X00X0X000000X0000XX0X0000000000XX
0X00X000X0XX00XXX0XX0X0X0XXX0000X
00XXX0XX00X0X000X0X00XX000XXX00000
X0X0X0X0XX0XX000XX0XXX000000X00XX
X0X0000XX0XX0000XXX0XXX0000XXXXX
X00X00XXX0XXX0XX00000XX0000XXX0XX0
XXXXXXX0X00000XXXXX0X00X0000X0X
XX00X0X0XX0XX0XXXXX00XX0X0000X0XX
0X0XXX0XXXX0000XXXX000X00XX0X

運・不運5年目

X O X O X O X O O O X X O O X O X O O X X O O O O O X O X X X X O O
X O X X X O O O X O O O O O X X X X X X O O O O O X O O X X O X O X
X X X X X X X O X X O O O X O O X O X X O X X X X X X O X O X X X X
X X X X X O X O O X X X O O O O X X X X X O X X O O O X O X X X X X
X X O O X O X O O X X O O X O X O O O O X O X O X O X O O O X X O X
O X O O O X X X O O O O X O O O X O X O X O X X X X O O O X X X O O
X O X O X X X O X X O O O O O X O O X O X O X X X X O X O O X O X X
X O O X X X X X X X O X X O X X O X X X O X O X X X O O O O O X X X
O O O O X O O O X O O X O X O O O O O O O X X X X X X O O O O O O
X X O X O O X X X X X O O X O X X O X X O O X X O O X O O O X X O X
O O O X O X X O O O X O O O X X O X O O X X O O X O

運・不運6年目

00X00XX0XX0X0X00000X00X0000XXX000
00000XX0XXX00XXX0XXXXX0X0XX000XXXXX
00X0XXX000X0000XX0000X00000000X0X0
XXXXX00X0XX0X0X0XX0XX00XX0XXX00X00
XX0X0XXX0XXX0X000X000XX0XXX00XXXXX
X00X00XXX0XX0X0X0X000XX00XXX0XX00
X0X0XX0X0X0XX0XXX000X0X000XX00X0X
XXXXXXXXX00XXXXXXXXX0XXXXXXXXX0X00X0X0
XXX000XX00X000000X0XX0XXX00000X00
00X0XXXXX0XXXXX0X00X00X0XXX0XXXXX0XX
000X00X00X0X0X000XXX0X0XXXXXX0

観察結果

xの連続回数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1年目	40	25	13	9	2	2	0	0	0	0	0
2年目	37	18	11	5	4	1	0	2	1	0	0
3年目	44	21	13	3	1	3	1	0	0	0	1
4年目	46	21	8	7	4	0	0	1	0	1	0
5年目	50	19	9	3	2	3	2	1	1	0	0
6年目	44	21	13	5	4	1	2	0	1	0	0

観察結果

xの連続回数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1年目	40	25	13	9	2	2	0	0	0	0	0
2年目	37	18	11	5	4	1	0	2	1	0	0
3年目	44	21	13	3	1	3	1	0	0	0	1
4年目	46	21	8	7	4	0	0	1	0	1	0
5年目	50	19	9	3	2	3	2	1	1	0	0
6年目	44	21	13	5	4	1	2	0	1	0	0
7年目	37	18	16	3	3	1	3	0	0	0	0
8年目	42	17	16	5	4	2	1	0	0	0	0
9年目	45	24	12	2	3	2	1	1	0	0	0
10年目	55	22	8	6	3	1	1	1	0	0	0

運・不運には粘着力がある

運・不運には粘着力がある
ように見えるがそれは気のせい

偶然

コインをな投げて最初7回裏が出たとしても、8回目に裏が出る確率は $\frac{1}{2}$ である。

結論

理由なしに不運が続くことがある

不幸が続いたからといって
死んでたら
体いくつあっても
足りまへんで

by しんいちろを