食玩あるいはteao問題は後戻りしない人生ゲームか

sinara@blade.nagaokaut.ac.jp

平成18年12月29日

1 【問題】線形な場合

【問題】一直線に1歩ずつ進んで後戻りしない「人生ゲーム」を考える。ステージは$1,\ 2,\ \cdots,\ k+1$ の $k+1$ 個で、$1 \to 2 \to 3 \to \cdots \to k+1$ と進む。1ステップで i から $i+1$ に進む確率は $p_i\,(>0)$、留まる確率は $q_i = 1 - p_i$ とする。

1からスタートし $k+1$ で上がるまでのステップ数が、このゲームで稼ぐ金額になるとすれば、稼ぐ金額の期待値 E は次で与えられることを示せ。

$$E = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k}.$$

2 【解答】線形な場合(1)

【解答(その1)】ステージ a から ステージ b までで稼ぐ金額の期待値を $E(a, b)$ と書くと、$a \leqq b \leqq c$ について、明らかに

$$E(a,\ b) + E(b,\ c) = E(a,\ c)$$

がなりたつ。従って

$$E = E(1,\ 2) + E(2,\ 3) + \cdots + E(k,\ k+1).$$

一方、ステージ i から n ステップで初めてステージ $i+1$ に移動する確率は $q_i^{n-1}p_i$ なので、$E(i,\ i+1) = \sum_{n=1}^{\infty} n q_i^{n-1} p_i$ である。公式 $\sum_{n=1}^{\infty} n q^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ を用いると、$E(i,\ i+1) = \frac{1}{p_i}$。よって

$$E = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k}.$$

(終)

3 【解答】線形な場合 (2)

【解答 (その 2)】$(i,\ j)$ 成分が「1 ステップでステージ i からステージ j に移動する確率」である行列を P で表すと

$$P = \begin{pmatrix} q_1 & p_1 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & q_2 & p_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & q_3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & p_{k-1} & 0 \\ \vdots & & & \ddots & q_k & p_k \\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。この時、$(i,\ j)$ 成分が「n ステップでステージ i からステージ j に移動する確率」を表す行列は P^n で表わされる。

n ステップ目に初めてステージ j に達するのは $n-1$ ステップでステージ $j-1$ に達し、最後に $j-1$ ステージから j ステージに移動することと同じなので、行列では $P^{n-1}P^*$ で表される。この P^* は、P の対角成分を 0 にしたもので、ここでは $P^* = \begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & p_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & p_k \\ 0 & \ldots\ldots\ldots & & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である。従って、$\mathcal{E}_P$ を $(i,\ j)$ 成分が「ステージ i からステージ j に移動する間に稼ぐ金額の期待値」である行列とすると

$$\mathcal{E}_P = \sum_{n=1}^{\infty} nP^{n-1}P^*$$

となる。$\overline{P}$ を P の左上、$\hat{P}$ を P の右上の k 次正方行列とする。すなわち

$$\overline{P} = \begin{pmatrix} q_1 & p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & p_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & q_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & p_{k-1} \\ 0 & \ldots\ldots\ldots & & 0 & q_k \end{pmatrix}, \quad \hat{P} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \ldots\ldots\ldots & & 0 \\ 0 & p_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & p_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots\ldots\ldots & & 0 & p_k \end{pmatrix}$$

として計算を進めると

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_P &= \sum_{n=1}^{\infty} n \begin{pmatrix} \overline{P} & * \\ \mathbf{0} & * \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \hat{P} \\ 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \begin{pmatrix} \overline{P}^{n-1} & * \\ \mathbf{0} & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \hat{P} \\ 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\overline{P}^{n-1}\hat{P} \\ 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

一般に $(1-q)^{-1}$ が存在して $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ なら、$\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = (1-q)^{-2}$ なので、$\sum_{n=1}^{\infty} n\overline{P}^{n-1} = (I-\overline{P})^{-2}$ となる。よって、

$$\mathcal{E}_P = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & (I-\overline{P})^{-2}\hat{P} \\ 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

である。(注: 以上は P が上三角行列であれば成り立つ。)
　以下、$\overline{\mathcal{E}_P} = (I-\overline{P})^{-2}\hat{P}$ を計算する。

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots\cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば

$$I-\overline{P} = \begin{pmatrix} p_1 & -p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & -p_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & p_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -p_{k-1} \\ 0 & \cdots\cdots & & 0 & p_k \end{pmatrix} = \hat{P}T$$

なので、

$$\overline{\mathcal{E}_P} = (\hat{P}T)^{-2}\hat{P} = T^{-1}\hat{P}^{-1}T^{-1}$$

である。これを

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots\cdots & & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots\cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p_1} & 0 & \cdots\cdots & & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{p_3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots\cdots & & 0 & \frac{1}{p_k} \end{pmatrix}$$

を用いて計算すれば

$$\overline{\mathcal{E}_P} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{p_1} & \dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2} & \dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}+\dfrac{1}{p_3} & \cdots\cdots\cdots & & \dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}+\dfrac{1}{p_3}+\cdots+\dfrac{1}{p_k} \\ 0 & \dfrac{1}{p_2} & \dfrac{1}{p_2}+\dfrac{1}{p_3} & \cdots\cdots\cdots & & \dfrac{1}{p_2}+\dfrac{1}{p_3}+\cdots+\dfrac{1}{p_k} \\ \vdots & \ddots & \dfrac{1}{p_3} & \cdots\cdots\cdots & & \dfrac{1}{p_3}+\cdots+\dfrac{1}{p_k} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \dfrac{1}{p_{k-1}} & \dfrac{1}{p_{k-1}}+\dfrac{1}{p_k} \\ 0 & \cdots\cdots\cdots & & & 0 & \dfrac{1}{p_k} \end{pmatrix}.$$

求める期待値 E(今後 E_P と書くことにする) は、$\overline{\mathcal{E}_P}$ の最も右上の成分である。(終)

4　人生ゲーム

【参考】必ずしも 1 歩ずつではなく複数歩進むことができる後戻りしない人生ゲームが 2 つあるとして、それぞれを表現する確率の行列を $P_1,\ P_2$ とし、この 2 つのゴールとスタートで連結したゲームの確率の行列を P とすると、$P_1,\ P_2,\ P$ は上三角行列でかつ $\hat{P} = \begin{pmatrix} \hat{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{P}_2 \end{pmatrix}$ と直和に分解する。(P は $P_1,\ P_2$ の直和ではない。) このとき、$(I-\overline{P})^{-2}\hat{P}$ を計算することにより、$\mathcal{E}_P$ は、$\mathcal{E}_{P_1}$ と $\mathcal{E}_{P_2}$ を使って次のように書けることがわかる。

$$\overline{\mathcal{E}}_P = \begin{pmatrix} \overline{\mathcal{E}}_{P_1} & \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{y}_1\boldsymbol{x}_2 \\ \mathbf{0} & \overline{\mathcal{E}}_{P_2} \end{pmatrix}$$

ここで

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1 &= \overline{\mathcal{E}_{P_1}}\text{の最後の列ベクトル} \\ \boldsymbol{x}_2 &= \overline{\mathcal{E}_{P_2}}\text{の最初の行ベクトル} \\ \boldsymbol{y}_1 &= \text{すべての要素が 1 の列ベクトル} \\ \boldsymbol{y}_2 &= (I-\overline{P_2})\overline{\mathcal{E}_{P_2}}\text{の最初の行ベクトル} \end{aligned}$$

更に、$\boldsymbol{y}_2$ の最終要素は 1 であることも確かめられ、$E_P = E_{P_1} + E_{P_2}$ が証明できる。また、$\hat{P}_2$ が対角行列であるとき、$\boldsymbol{y}_2$ はすべての要素が 1 の行ベクトルである。

5 【問題】一般の場合

【問題】スタートから出発しゴールに達するまでのステップ数を賞金とする「人生ゲーム」を考える。ただし、「人生ゲーム」は各ステージを飛ばしたり後戻りしたりする事も許し、1 つずつのスタートとゴールを持つ。

人生ゲーム G に対し、その賞金の期待値を E_G と書くことにする。

2 つの「人生ゲーム」G_1 と G_2 があり、G_1 のゴールと G_2 のスタートを繋いだ新しいゲームを G とする。このとき $E_G = E_{G_1} + E_{G_2}$ を示せ。

6 【解答】一般の場合

【解答 (その 1)】G のステージの総数を $k+1$ とし、ステージ 1 がスタート、ステージ $k+1$ がゴールとする。$(i,\ j)$ 成分が「1 ステップでステージ i からステージ j に移動する確率」である $k+1$ 次正方行列を P で表すと、第 $(i,\ j)$ 成分が「n ステップでステージ i からステージ j に移動する確率」を表す行列は P^n で表わされる。

$\overline{P}$ を P の左上の k 次正方行列、$\overrightarrow{P}$ を P の最後の列の最終成分を除いた k 次元ベクトルとすると、$P = \begin{pmatrix} \overline{P} & \overrightarrow{P} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と書ける。

n ステップ目に初めてゴールに達するのは $n-1$ ステップでゴール直前のステージに達し、最後にゴールに移動すること同じなので、第 i $(1 \leqq i \leqq k)$ 番目の成分が「第 i ステージから n ステップでゴールに入る確率」を表す k 次元ベクトルは $\overline{P}^n \overrightarrow{P}$ で表される。また

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{P}^n \overrightarrow{P} = (\text{各ステージからゴールにたどり着く確率}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

であることに注意する。

$\overrightarrow{e}_P$ を第 i $(1 \leqq i \leqq k)$ 成分が「ステージ i からゴールに移動する間に稼ぐ金額の期待値」である k 次元ベクトルとすると

$$\overrightarrow{e}_P = \sum_{n=1}^{\infty} n \overline{P}^{n-1} \overrightarrow{P}$$

であり、E_P はこのベクトルの第 1 成分に等しい。

さて、G は $G_1,\ G_2$ を連結して作ったゲームなので、それぞれを表現する確率の行列を $P,\ P_1,\ P_2$ とすると

$$P = \begin{pmatrix} \overline{P_1} & \overrightarrow{P_1}\ \mathbf{0}\ \cdots\ \mathbf{0} \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$$

となっている。このとき

$$\overline{P} = \begin{pmatrix} \overline{P_1} & R_1 \\ 0 & \overline{P_2} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \overrightarrow{P_2} \end{pmatrix}, \quad R_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{P_1} \quad \cdots (*).$$

である。ここで、$R_1 = \begin{pmatrix} \overrightarrow{P_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ とおいた。

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{e}_P &= \sum_{n=1}^{\infty} n \begin{pmatrix} \overline{P_1} & R_1 \\ 0 & \overline{P_2} \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \overrightarrow{P_2} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \begin{pmatrix} \overline{P_1}^{n-1} & \displaystyle\sum_{i+j=n-1} \overline{P_1}^i R_1 \overline{P_2}^j \\ 0 & \overline{P_2}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \overrightarrow{P_2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{i+j=n-1} \overline{P_1}^i R_1 \overline{P_2}^j \overrightarrow{P_2} \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \overline{P_2}^n \overrightarrow{P_2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

このベクトルの下部は $\overrightarrow{e}_{P_2}$ に等しい。上部は

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{i+j=n-1} \overline{P_1}^i R_1 \overline{P_2}^j \overrightarrow{P_2} &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (i+j) \overline{P_1}^i R_1 \overline{P_2}^j \overrightarrow{P_2} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} i \overline{P_1}^i R_1 \overline{P_2}^j \overrightarrow{P_2} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} j \overline{P_1}^i R_1 \overline{P_2}^j \overrightarrow{P_2} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} i \overline{P_1}^i R_1 \sum_{j=0}^{\infty} \overline{P_2}^j + \sum_{i=0}^{\infty} \overline{P_1}^i R_1 \sum_{j=0}^{\infty} j \overline{P_2}^j \overrightarrow{P_2} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} i \overline{P_1}^i R_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{\infty} \overline{P_1}^i R_1 \overrightarrow{e}_{P_2} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \overline{P_1}^i \overrightarrow{P_1} + \sum_{i=0}^{\infty} \overline{P_1}^i R_1 \overrightarrow{e}_{P_2} \\
&= \overrightarrow{e}_{P_1} + \sum_{i=0}^{\infty} \overline{P_1}^i R_1 \overrightarrow{e}_{P_2}.
\end{aligned}$$

よって

$$\overrightarrow{e}_P = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e}_{P_1} + \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \overline{P_1}^i R_1 \overrightarrow{e}_{P_2} \\ \overrightarrow{e}_{P_2} \end{pmatrix} \quad \cdots (**).$$

更に

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty}\overline{P_1}^i R_1 \overrightarrow{e}_{P_2} &= \sum_{i=0}^{\infty}\overline{P_1}^i \begin{pmatrix}\overrightarrow{P_1} & \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}\end{pmatrix} \overrightarrow{e}_{P_2} \\
&= \begin{pmatrix}\sum_{i=0}^{\infty}\overline{P_1}^i \overrightarrow{P_1} & \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}\end{pmatrix} \overrightarrow{e}_{P_2} \\
&= \begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} & \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}\end{pmatrix} \overrightarrow{e}_{P_2} \\
&= E_{P_2}\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

であるから、これを $(**)$ に代入して次が得られる。

$$
\overrightarrow{e}_P = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e}_{P_1} + E_{P_2}\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} \\ \overrightarrow{e}_{P_2} \end{pmatrix}.
$$

両辺の第 1 成分を見比べることにより $E_P = E_{P_1} + E_{P_2}$ がわかる。

(注)$R_1 = \begin{pmatrix}\overrightarrow{P_1} & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$ でなくても、$(*)$ を満たしているなら $(**)$ は成立している。