

# トポロジー

原 信一郎

December 21, 2021

<http://blade.nagaokaut.ac.jp/~hara/class/modern-math/>

# 01 目次

- ① オイラー数  $\chi$
- ② 曲率と  $\chi$
- ③ 特異点と  $\chi$
- ④ 空間・位相空間
- ⑤ 不動点定理
- ⑥ 原の定理
- ⑦ 定理の証明
- ⑧ 定理の応用
- ⑨ 現代数学

## 02 オイラー数 $\chi$

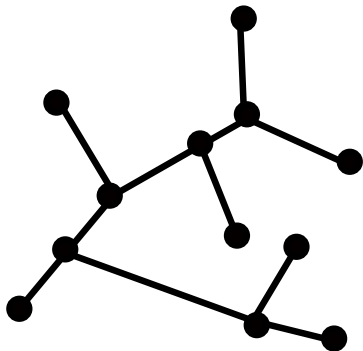
# 植木算

11メートルの道に1メートルごとに木を植えました。木は何本必要でしょうか。



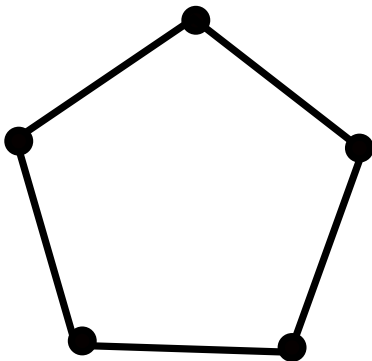
点の数 ( $v$ )	線分の数 ( $e$ )	$\chi = v - e$

# 植木算の一般化 (1次元版)



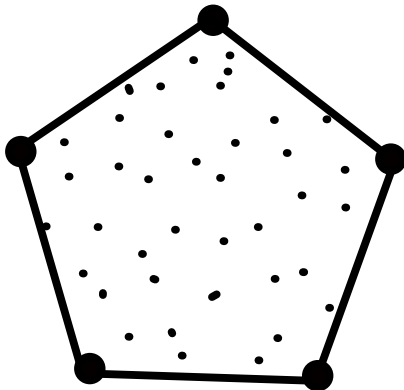
点の数 ( $v$ )	線分の数 ( $e$ )	$\chi = v - e$

# 植木算の破綻



点の数 ( $v$ )	線分の数 ( $e$ )	$\chi = v - e$

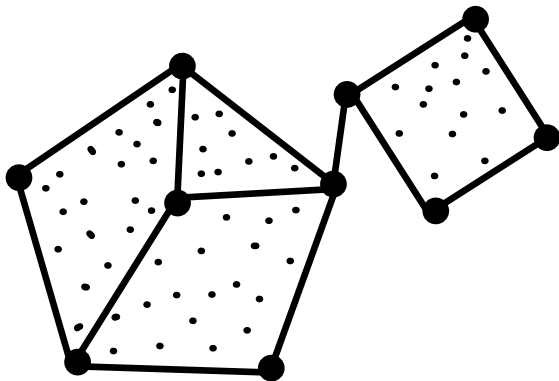
# 植木算の再生



点の数 ( $v$ )	線分の数 ( $e$ )	面の数 ( $f$ )	$\chi = v - e + f$



# 植木算の一般化 (2次元版)



点の数 ( $v$ )	線分の数 ( $e$ )	面の数 ( $f$ )	$\chi = v - e + f$

# オイラー (Euler) の定理

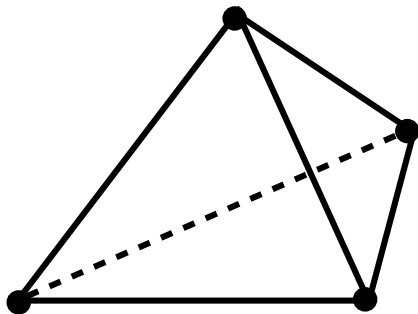
次はトポロジーにおける最も基本的な公式である。

定理 (オイラーの定理)

どんな凸図形でも  $\chi = 1$  が成り立つ。

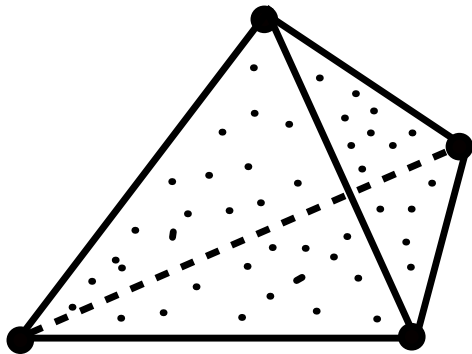
【証明】

# 再び植木算の破綻



点の数 ( $v$ )	線分の数 ( $e$ )	面の数 ( $f$ )	$\chi = v - e + f$

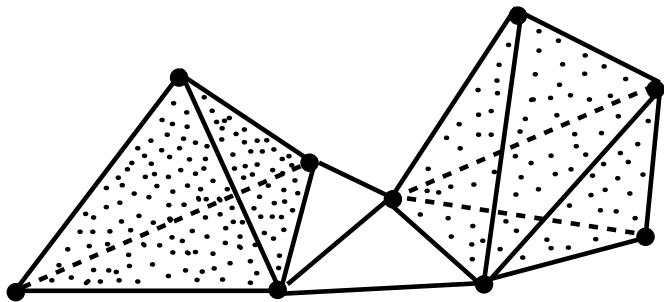
# 再び植木算の再生



点の数 ( $v$ )	線分の数 ( $e$ )	面の数 ( $f$ )	体の数 ( $b$ )	$\chi$

$$\chi = v - e + f - b$$

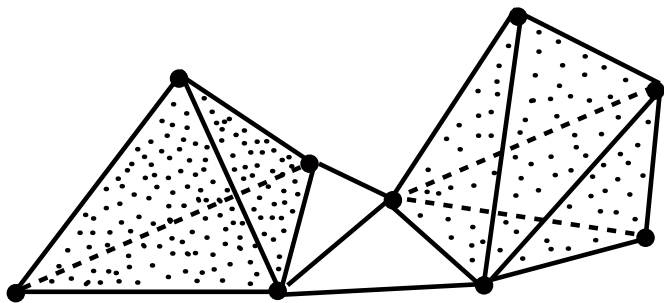
# 植木算の一般化 (3次元版)



点の数 ( $v$ )	線分の数 ( $e$ )	面の数 ( $f$ )	体の数 ( $b$ )	$\chi$

$$\chi = v - e + f - b$$

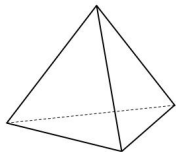
# 植木算の一般化 (3次元版)



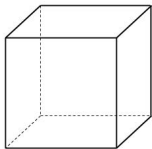
点の数 ( $v$ )	線分の数 ( $e$ )	面の数 ( $f$ )	体の数 ( $b$ )	$\chi$
9	18	13	3	1

$$\chi = v - e + f - b$$

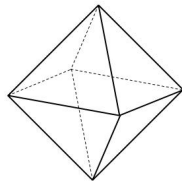
# オイラーの多面体定理



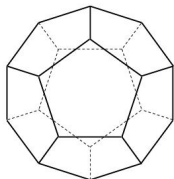
正四面体



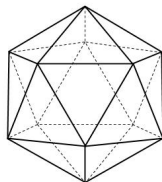
正六面体



正八面体



正十二面体



正二十面体

点の数 ( $v$ )	線分の数 ( $e$ )	面の数 ( $f$ )	$\chi = v - e + f$

# オイラーの多面体定理

定理 (オイラーの多面体定理)

どんな凸多面体でも  $\chi = 2$  が成り立つ。

【証明】

(後で別証を「デカルトの定理」の証明とともに述べる。)



## 03 曲率

## 03 曲率 - 目次

- ① 多角形の内角の和
- ② 球面幾何学
- ③ 多面体の頂点の曲率
- ④ 曲面の曲率

## 多角形の内角の和

【問題】  $n$  角形の内角の和は幾つか？

## 折れ線の曲率

【問題】 全曲率  $= 2\pi$  が成り立つように各頂点に「曲率  $k$ 」を定義しなさい。

# 折れ線の全曲率

【答】

定義 (曲率のデジタル版)

折れ線の頂点における

$$k = \text{外角}$$

をその点の曲率呼ぶ。

定理 (Gauss - Bonne の定理の平面曲線デジタル版)

多角形の全ての頂点についての曲率  $k$  の和は  $2\pi$  である。

$$\sum_{\text{頂点}} k = 2\pi$$

## 曲線の全曲率

定理 (Gauss - Bonne の定理の平面曲線版)

滑らかな単純閉曲線の曲率  $k$  を全曲線で積分すると  $2\pi$  になる。

$$\oint k ds = 2\pi$$

ただし、滑らかな閉曲線の曲率  $k$  とは、以下定義するものである。

## 曲線の曲率の定義

曲線  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  を考える。  $i = 0, 1$  について  $t = t_i$  における法線は、  $x'_i = x'(t_i)$ ,  $y'_i = y'(t_i)$  とおくと、

$x'_i(x - x_i) + y'_i(y - y_i) = 0$  で与えられる。  $i = 0, 1$  について連立方程式を解くと、 
$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \frac{x'_1(x_1 - x_0) + y'_1(y_1 - y_0)}{x'_0y'_1 - x'_1y'_0} \begin{pmatrix} -y'_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}$$

となる。  $x_1 \rightarrow x_0$ ,  $y_1 \rightarrow y_0$  という極限を取ると、  $x''_0 = x''(t_0)$ ,

$y''_0 = y''(t_0)$  とおいて、 
$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \frac{x_0'^2 + y_0'^2}{x_0'y_0'' - x_0''y_0'} \begin{pmatrix} -y_0' \\ x_0' \end{pmatrix}$$
 となる。

左辺のベクトルは、点  $(x_0, y_0)$  における曲線の 2 重接触円の中心に向かう半径を表すベクトルであり、この大きさの逆数（符号付き）を、この点における曲率と定義する。

定義 (曲線における曲率の定義)

$$k = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

# Gauss - Bonne の定理の平面曲線版の証明

$ds = (x'^2 + y'^2)^{1/2} dt$  とするとき、 $K = \oint k ds$  を求める。

$k$  は、パラメーターに依存しない<sup>(\*)</sup> ので、 $t = s$  にとる。このとき、 $x'^2 + y'^2 = 1$  であり、 $k = x'y'' - x''y'$  である。パラメーター  $\theta$  を  $x' = \cos \theta, y' = \sin \theta$  となるように取ると、 $x'' = -\theta' \sin \theta, y'' = \theta' \cos \theta$  なので、

$k = \cos \theta \cdot (\theta' \cos \theta) - (-\theta' \sin \theta) \cdot \sin \theta = \theta'$  である。よって、

$K = \oint k ds = \int \theta' ds = \int 1 d\theta$  であるが、曲線が単純な閉曲線なら、この値は  $2\pi$  に等しい。

(\*  $k$  がパラメーターに依存しない事について) これは、 $k$  の幾何的な構成から明らかであるが、 $t = \varphi(u)$  とおいて具体的に計算すると、 $(X' = \frac{dX}{dt}, \dot{X} = \frac{dX}{du}$  とする。)

$\dot{x} = x' \dot{\varphi}, \ddot{x} = x'' \dot{\varphi}^2 + x' \ddot{\varphi}, \dot{y} = y' \dot{\varphi}, \ddot{y} = y'' \dot{\varphi}^2 + y' \ddot{\varphi}$  より、

$\frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$  が得られる。



## 単なる参考・曲線の曲率の極座標表示

$x = r(t) \cos t$ ,  $y = r(t) \sin t$  とおくと、  
 $x'y'' - x''y' = r^2 + 2r'^2 - rr''$ ,  $x'^2 + y'^2 = r'^2 + r^2$   
である。よって、

$$k = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r'^2 + r^2)^{3/2}}$$

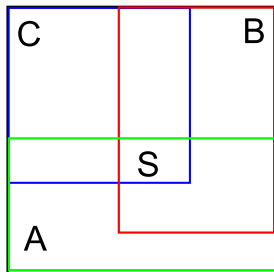
$$k ds = \frac{x'y'' - x''y'}{x'^2 + y'^2} dt = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r'^2 + r^2} dt = \left( 1 + \frac{r'^2 - rr''}{r'^2 + r^2} \right) dt$$

# 曲率の多面体あるいは曲面版

曲率の多面体版を考えよう。

# (唐突ですが) 球面幾何学 1

【問】  $|D|$  で、 $D$  という図形の面積を表すとする。  
平面上に領域  $A, B, C$  がある。これらの共通部分の面積  $S = |A \cap B \cap C|$  を、 $|A \cup B \cup C|$ ,  $|A|$ ,  $|B|$ ,  $|C|$ ,  $|B \cap C|$ ,  $|A \cap C|$ ,  $|A \cap B|$  で表しなさい。



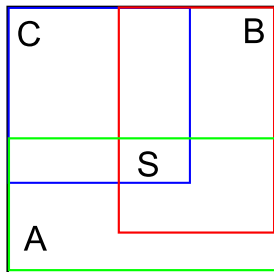
## 球面幾何学 2

【答】「包除原理」

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap C| - |A \cap B| + |A \cap B \cap C|$$

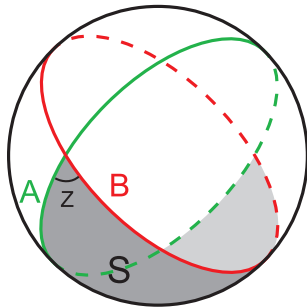
より,  $S =$

$$|A \cap B \cap C| = |A \cup B \cup C| - |A| - |B| - |C| + |B \cap C| + |A \cap C| + |A \cap B|$$



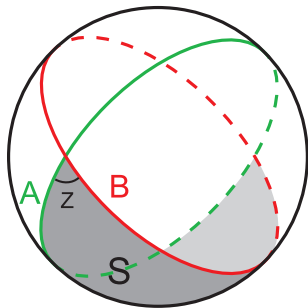
## 球面幾何学 3

【問】 半径 1 の球面に 2 つの半球面があり、それぞれの周である円を  $A, B$  と名づける。2 つの半球面の共通部分の面積  $S$  を、共通部分の側で  $A$  と  $B$  がなす角度  $z$  で表しなさい。



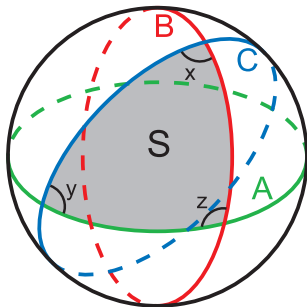
## 球面幾何学 4

【答】 共通部分の面積は、そのなす角に比例し、角が $\pi$ のとき面積は $2\pi$ なので、 $S = 2z$ 。



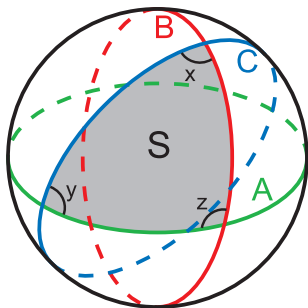
## 球面幾何学 5

【問】 半径 1 の球面に 3 つの半球面があり、それぞれの周である円を  $A, B, C$  と名づける。すべての半球面の共通部分の面積  $S$  を、それを取り囲む角で表しなさい。ただし、 $B$  と  $C$  のなす角度を  $x$ 、 $C$  と  $A$  のなす角度を  $y$ 、 $A$  と  $B$  のなす角度を  $z$  とする。



## 球面幾何学 6

【答】前問から、 $|B \cap C| = 2x$ ,  $|C \cap A| = 2y$ ,  $|A \cap B| = 2z$ , である。一方、3つの半球でおおわれない部分は、球の中心に対する対称性から、 $S$  と全く対称な形をしているので、3つの半球でおおう部分の面積は、 $4\pi - S$  である。前と同じ論法により、 $4\pi - S = 2\pi + 2\pi + 2\pi - 2x - 2y - 2z + S$ 。  
これを  $S$  について解くと、 $S = \underline{x + y + z - \pi}$ 。





# 球面幾何学 7

## 定義

球面と球面の中心を通る平面の交わりの円を大円と言う。大円を球上の直線とも言う。3つの直線で囲まれた図形を三角形と言う。

## 定理 (球面三角形の面積の公式)

半径1の球面では、

$$\text{三角形の面積} = \text{内角の和} - \pi$$

## 定理 (球面多角形の面積の公式)

半径1の球面では、

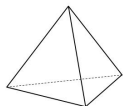
$$\begin{aligned} n \text{ 角形の面積} &= \text{内角の和} - (n - 2)\pi \\ &= 2\pi - \text{外角の和} \end{aligned}$$

定義 (多面体の頂点の曲率)

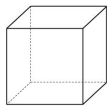
$$k = 2\pi - \text{頂点に集まる角の和}$$

## 多面体の曲率 2

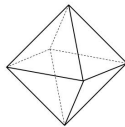
多面体	各頂点の $k$
正四面体	$\pi$
正六面体	$\pi/2$
正八面体	$2\pi/3$
正十二面体	$\pi/5$
正二十面体	$\pi/3$



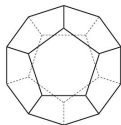
正四面体



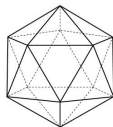
正六面体



正八面体



正十二面体

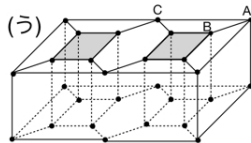
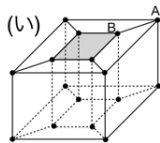
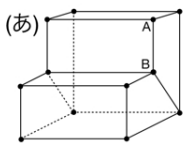


正二十面体

# 多面体の曲率 3

多面体 (あ)	$A \rightarrow \pi/2, B \rightarrow -\pi/2$
多面体 (い)	$A \rightarrow \pi/2, B \rightarrow -\pi/2$
多面体 (う)	$A \rightarrow \pi/2, B \rightarrow -\pi/2, C \rightarrow 0$

ここで、(あ)、(い)、(う)は、下図のような多面体で、(あ)は、直方体から直方体を取り除き、左右の側面を斜めの辺で分割した形、(い)は、直方体の上から下へ直方体状の穴を開け、上面と底面をそれぞれ4本の斜めの辺で分割した形、(う)は、直方体の上から下へ直方体状の穴を2つ開け、上面と底面をそれぞれ8本の斜めの辺で分割した形です。



# 多面体の曲率 4

多面体	頂点の数	辺の数	面の数	各頂点の $k$	$k$ の和
正四面体	4	6	4	$\pi$	$4\pi$
正六面体	8	12	6	$\pi/2$	$4\pi$
正八面体	6	12	8	$2\pi/3$	$4\pi$
正十二面体	20	30	12	$\pi/5$	$4\pi$
正二十面体	12	30	20	$\pi/3$	$4\pi$
多面体 (あ)	12	20	10	A $\pi/2$ , B $-\pi/2$	$4\pi$
多面体 (い)	16	32	16	A $\pi/2$ , B $-\pi/2$	0
多面体 (う)	28	56	26	A $\pi/2$ , B $-\pi/2$ , C 0	$-4\pi$

## 多面体の曲率 4

定理 (Gauss-Bonne の定理のデジタル版)

$$k \text{ の和} = 2\pi\chi$$

(次ページで、証明する。)

## 多面体の曲率 5

**[証明]** ある一つの頂点について、  
 $k = 2\pi -$ (頂点に集まる角の和) と定義した。ここで  $v$  個の全ての頂点について和を取ろう。全ての頂点について頂点に集まる角の和を取ることは、全ての面についての内角の和を取ることに同じなので、

$$(k \text{ の和}) = 2\pi \times v - (\text{全ての面についての内角の和}) \cdots (a)$$

となる。一方、各面について (内角の和) =  $\pi \times$ (辺の数) -  $2\pi$  である。これを  $f$  個の全ての面について和を取ると、辺の数はそれに接している 2 つの面で 2 回数えられ、 $2e$  に等しくなるので (全ての面についての内角の和) =  $\pi \times 2e - 2\pi \times f$  である。これを (a) に代入すると

$$(k \text{ の和}) = 2\pi \times v - (\pi \times 2e - 2\pi \times f) = 2\pi \times (v - e + f) = 2\pi\chi$$

となる。□

# デカルトの定理

## 定理 (デカルトの定理)

凸多面体では、

$$k \text{ の和} = 4\pi$$

である。

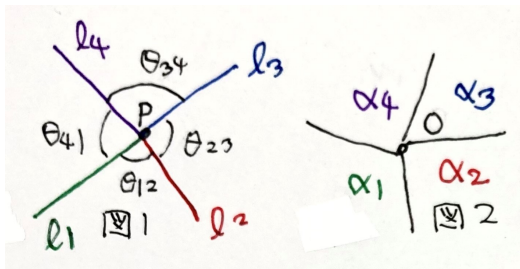
(証明は次ページ。)

全天の立体角は  $4\pi$  である。



# デカルトの定理の証明

多面体の内部(でなくてもいいけど)に任意の点 $O$ を取る。



(頂点 $P$ が向こう側、 $O$ がこっち側にある図)

図1の様に、ある頂点 $P$ に、3辺 $l_1, l_2, l_3, l_4$ が集まっているとし、 $l_1, l_2$ のなす角 $=\theta_{12}$ 、 $l_2, l_3$ のなす角 $=\theta_{23}$ 、 $l_3, l_4$ のなす角 $=\theta_{34}$ 、 $l_4, l_1$ のなす角 $=\theta_{41}$ とする。

$O$ を通り $l_1, l_2, l_3, l_4$ を法線とし、 $O$ を含む平面を図2のように、 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ とする。

# デカルトの定理の証明(つづき)

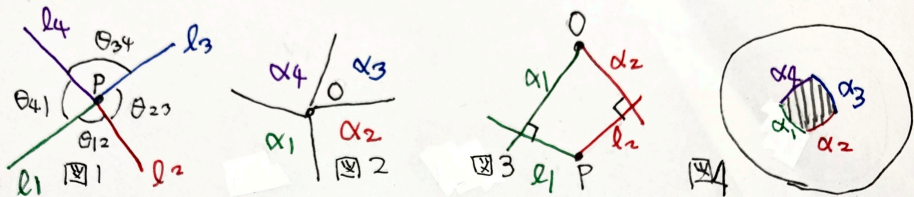


図3のように、 $l_1, l_2$ を含む平面は $\alpha_1, \alpha_2$ と直交するので、 $\theta_{12}$ は $\alpha_1, \alpha_2$ のなす角の「外角」に等しい。他の角についても同様なので、

$$k = 2\pi - \theta_{12} - \theta_{23} - \theta_{34} - \theta_{41}$$

=  $2\pi$  - 4つの平面が作る4辺形の外角の和

=  $O$ を中心とする半径1の球を4つの平面が切り取る面積

となるが、となる。更に、全ての頂点についてのこの値の和は、半径1の球の総面積なので、 $k$ の和は $4\pi$ になる。各頂点により多く(少なく)辺が集まっている場合も同様。(証明終)

# オイラーの多面体定理の (別) 証明

Gauss-Bonne 定理より、

$$2\pi\chi = k \text{ の和}$$

である。また、デカルトの定理より、

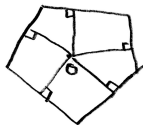
$$k \text{ の和} = 4\pi$$

である。よって、 $2\pi\chi = 4\pi$ 。よって、 $\chi = 2$  である。

## Gauss-Bonne 定理の平面曲線デジタル版の別証明

多角形の外角の和が $2\pi$ になることの証明は、図2の様に、点 $O$ を適当に定め、 $O$ を通る各辺の法線を考えて、「法線のなす角は外角に等しい。法線がぐるっと一回りするので外角の和は $2\pi$ に等しい。」と証明するのが、最も洗練されたものである。

図2



# 曲面のガウス曲率と Gauss-Bonne の定理

次はすでに証明されている。

**定理 (Gauss - Bonne の定理の平面曲線版)**

滑らかな単一閉曲線の曲率を全曲線で積分すると  $2\pi$  になる。

曲面においても各点において曲率 (ガウス曲率) を定義することができる。このとき次が成り立つ。

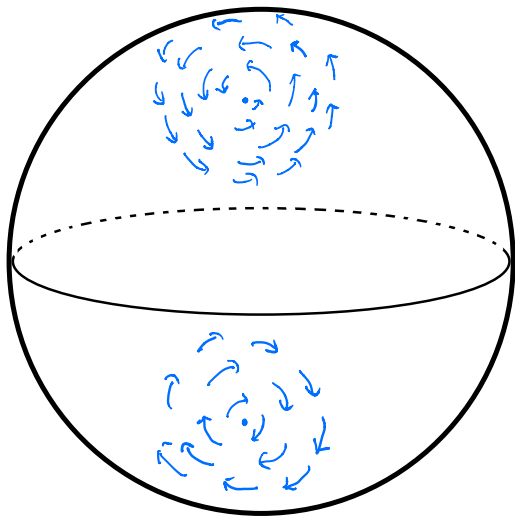
**定理 (Gauss-Bonne の定理)**

滑らかな凸な閉曲面の曲率を全曲面で積分すると  $4\pi$  になる。

## 04 特異点と $\chi$

台風の「目」のような無風の点(常態でない場所)を特異点という。

# 特異点の存在定理





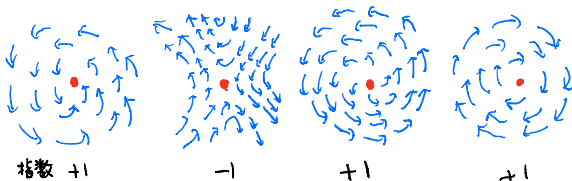
# 空間と特異点

空間内の「流れ」の特異点と  $\chi$  には密接な関係がある。

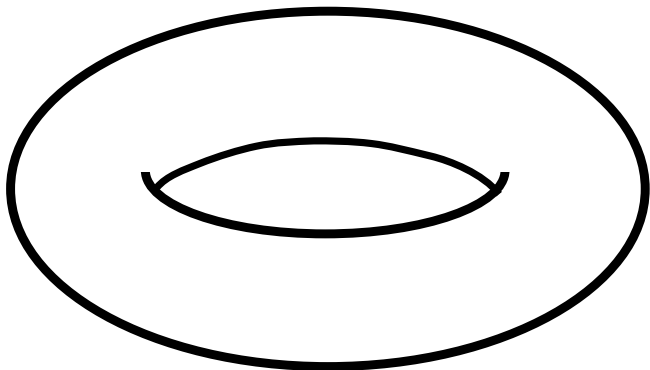
ポアンカレ・ホップの定理

空間の気流の各特異点における「指数」の和はその空間の  $\chi$ (オイラー数) に等しい。

(注)「指数」とは特異点における気流の回転量のようなもの。



# 特異点の非存在の例



本質は例外に現れる。



ポワンカレ・ホップの定理

空間は境界に規定される。

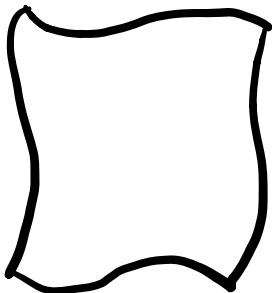


ストークスの定理

## 05 空間

もの → 空間

# 空間が歪むとは

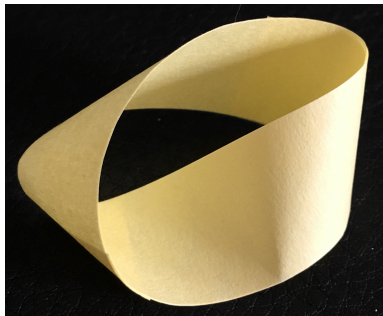


# (通俗的な?) メビウスの帯

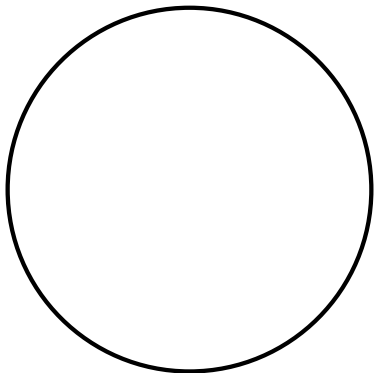




# コンセプトとしてのメビウスの帯

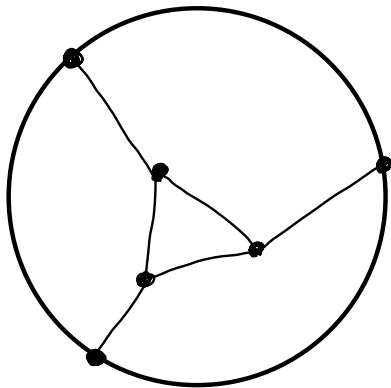


# 円板で



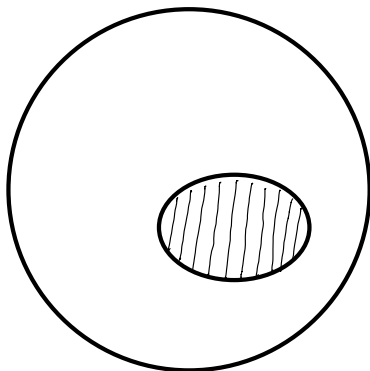
点の数 ( $v$ )	線分の数 ( $e$ )	面の数 ( $f$ )	$\chi = v - e + f$

# 円板で



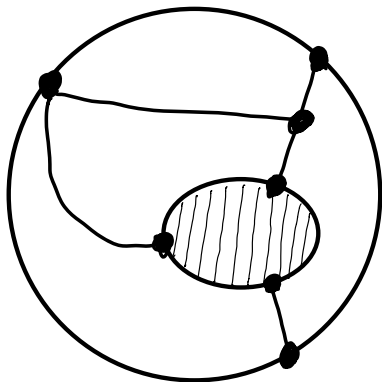
点の数 ( $v$ )	線分の数 ( $e$ )	面の数 ( $f$ )	$\chi = v - e + f$
6	9	4	1

# 円環で



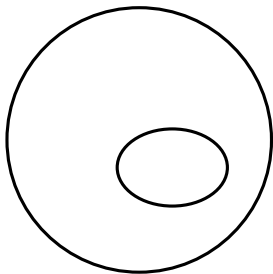
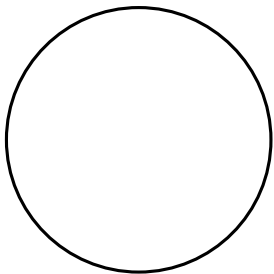
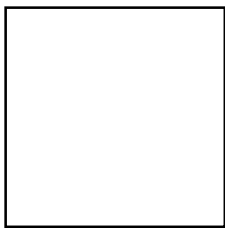
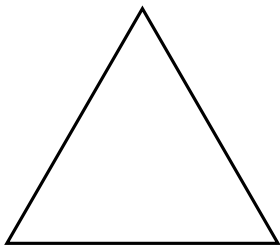
点の数 ( $v$ )	線分の数 ( $e$ )	面の数 ( $f$ )	$\chi = v - e + f$

# 円環で

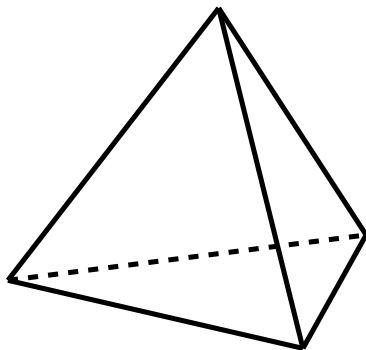


点の数 ( $v$ )	線分の数 ( $e$ )	面の数 ( $f$ )	$\chi = v - e + f$
7	11	4	0

# 平面图形

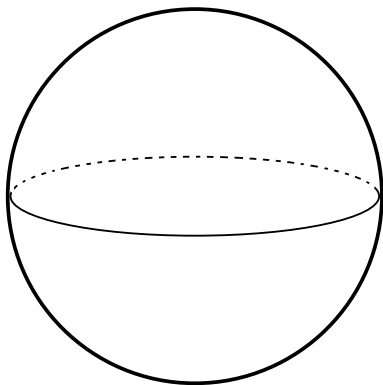


# 四面体で



点の数 ( $v$ )	線分の数 ( $e$ )	面の数 ( $f$ )	$\chi = v - e + f$
4	6	4	2

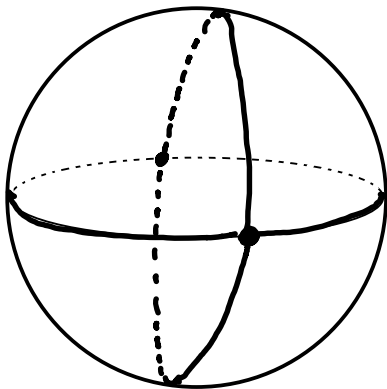
# 球



点の数 ( $v$ )	線分の数 ( $e$ )	面の数 ( $f$ )	$\chi = v - e + f$

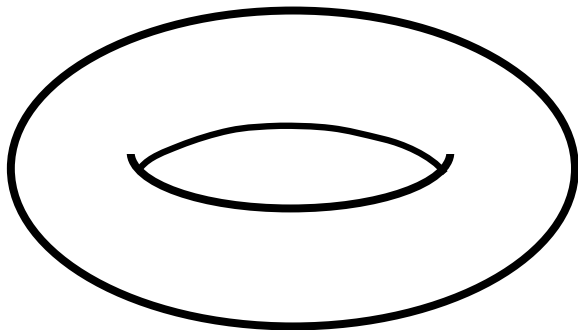


# 球



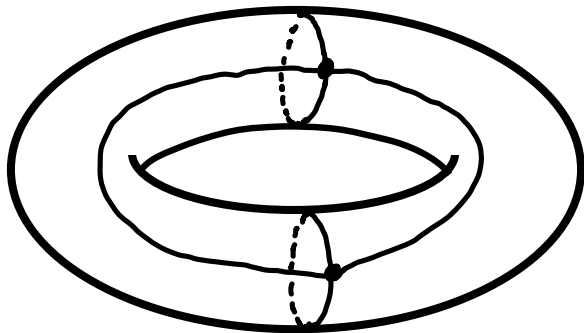
点の数 ( $v$ )	線分の数 ( $e$ )	面の数 ( $f$ )	$\chi = v - e + f$
2	4	4	2

# トーラス



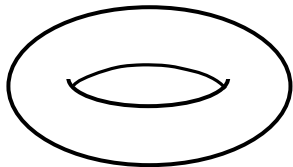
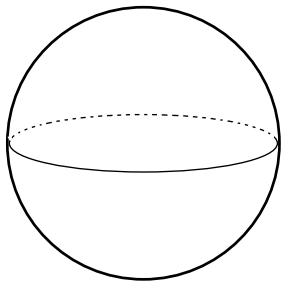
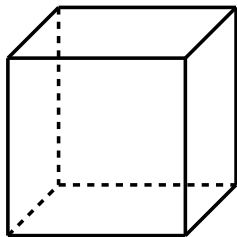
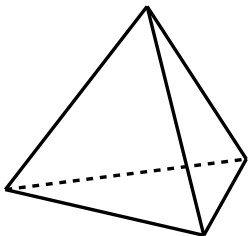
点の数 ( $v$ )	線分の数 ( $e$ )	面の数 ( $f$ )	$\chi = v - e + f$

# トーラス



点の数 ( $v$ )	線分の数 ( $e$ )	面の数 ( $f$ )	$\chi = v - e + f$
2	4	2	0

# 3D 図形



20世紀に入って、数学のターゲットが、  
ものから空間に移った。

空間とは、外部の存在をより所にせず、  
超越的な視点を持たず、内部の規定のみ  
で存在する世界のこと。

空間 = 集合 + 構造

変形で不変な指標をその空間の不変量という。

$\chi$ (オイラー数) は空間の連続的変形に関する不変量である。

$\chi$  は空間のトポロジカルな構造を抽出する。

## 06 位相空間

この講義では、位相空間とは距離空間のことである。

- ① 距離空間
- ② 開集合・閉集合
- ③ 集積点・コンパクト性
- ④ 実数・ユークリッド空間
- ⑤ 関数の極限
- ⑥ 連続写像
- ⑦ 同相
- ⑧ ホモトピー
- ⑨ ホモトピー同値



# 距離空間

$X$  を集合、 $d$  を 2 変数関数  $d: X \times X \rightarrow X$  とし、以下の条件を満たすとき、 $(X, d)$  を距離空間という。

- ①  $d(x, y) \geq 0$
- ②  $d(x, y) = d(y, x)$
- ③  $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$  (三角不等式)
- ④  $d(x, y) = 0 \iff x = y$

$d$  を  $X$  上の距離と言う。

## 注

距離空間は「位相空間」の一種である。「位相空間」の定義は今回はしない。

## 定理

距離空間の部分集合は同じ距離で距離空間である。

## 距離空間の積

$(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  が距離空間であるとき、その集合の積  $X \times Y$  上に  $P(x_1, y_1)$ ,  $Q(x_2, y_2)$  に対し、  
 $d_{X \times Y}(P, Q) = \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2}$  と定義すると、 $d_{X \times Y}$  は  $X \times Y$  上の距離になる。これを距離空間  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  の直積と言う。

【 $d_{X \times Y}$  が三角不等式を満たすことの証明】

$P(x_1, y_1)$ ,  $Q(x_2, y_2)$  に対し、 $\vec{d}(P, Q) = \begin{pmatrix} d_X(x_1, x_2) \\ d_Y(y_1, y_2) \end{pmatrix}$  と置け

ば、 $d_{X \times Y}(P, Q) = |\vec{d}(P, Q)|$  である。 $R(x_3, y_3)$  として、

$d_{X \times Y}(P, Q) + d_{X \times Y}(Q, R) = |\vec{d}(P, Q)| + |\vec{d}(Q, R)| \geq$

$|\vec{d}(P, Q) + \vec{d}(Q, R)| = \left| \begin{pmatrix} d_X(x_1, y_1) + d_X(y_1, z_1) \\ d_Y(x_2, y_2) + d_Y(y_2, z_2) \end{pmatrix} \right| \geq$

$\left| \begin{pmatrix} d_X(x_1, z_1) \\ d_Y(x_2, z_2) \end{pmatrix} \right| = |\vec{d}(P, R)| = d_{X \times Y}(P, R)$

## 距離空間の積 (その 2)

$d_{X \times Y}(P, Q) = (d_X(x_1, x_2)^p + d_Y(y_1, y_2)^p)^{\frac{1}{p}}$  と定義しても、これは  $X \times Y$  上の距離になる。

## 定義

$\varepsilon > 0$  とする。 $P \in X$  に対し、 $U_\varepsilon(P) = \{x \in X \mid d(x, P) < \varepsilon\}$  を  $P$  の  $\varepsilon$  近傍という。

$O$  を  $X$  の部分集合とする。

## 定義 (内点)

$P \in X$  について  $\exists \varepsilon > 0 U_\varepsilon(P) \subset O$  を満たすとき、 $P$  を  $O$  の内点と言う。

## 定義 (開集合、閉集合)

$O$  の全ての点が  $O$  の内点であるとき、開集合であると言う。  
 $X$  の部分集合  $F$  は、その補集合  $F^c$  が開集合であるとき、閉集合であると言う。

# 点列の収束・点列コンパクト

## 定義 (収束、極限值)

距離空間  $(X, d)$  が次を満たすとき、数列  $\{x_n\}_{n=1,2,3,\dots}$  は、極限值  $a$  を持ち、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  と書く。

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 x_n \in U_\varepsilon(a)$$

## 注

この定義に則った議論を  $\varepsilon - \delta$  論法あるいは  $\varepsilon - N$  論法と言う。

## $\varepsilon - \delta$ 論法による定理の証明の例

### 定理

$a_1, a_2, a_3, \dots$  が収束して極限值  $\alpha$  を持つとき、最初の  $n$  項の平均  $S_n = \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n}$  を考えると、 $S_1, S_2, S_3, \dots$  も  $\alpha$  に収束する。

**[証明]**  $a_n$  の代わりに  $a_n - \alpha$  を考えることにより、もともと  $\alpha = 0$  としてよい。与えられた任意の  $\varepsilon > 0$  に対し、 $m$  が存在して、 $n > m$  となる任意の  $n$  に対して、 $|a_n| < \varepsilon/2$  とできる。 $|a_1|, |a_2|, \dots, |a_m|$  の最大値を  $A$  とすると、 $\frac{mA}{\varepsilon/2} < n$  となる任意の  $n$  について、 $\frac{mA}{n} < \varepsilon/2$  となる。よって  $n > m$ ,  $\frac{mA}{\varepsilon/2}$  なら、 $|S_n| < \frac{|a_1|+|a_2|+\dots+|a_m|}{n} + \frac{|a_{m+1}|+|a_{m+2}|+\dots+|a_n|}{n} < \frac{mA}{n} + \frac{n-m}{n}\varepsilon/2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$  となり、証明された。□

# コンパクト

## 定義 (点列コンパクト)

距離空間  $X$  が点列コンパクトであるとは、 $X$  の任意の数列  $\{x_n\}$  が  $X$  に極限値を持つ部分列を持つことである。

## 定義 (有界)

距離空間  $X$  が有界であるとは、ある点  $P \in X$  と数  $R$  が存在して  $\forall x \in X d(x, P) \leq R$  となるときに言う。

# 実数・ユークリッド空間

## 定義

$\mathbb{R}^n$  に通常の距離を「入れた」ものをユークリッド空間と言う。

## 定理

$\mathbb{R}^n$  の部分集合が点列コンパクトであるための必要十分条件は、有界閉集合であることである。

## 例

- ①  $\mathbb{R}$  で、閉区間  $[a, b]$  は点列コンパクトである。
- ②  $\mathbb{R}^2$  で、矩形  $[a, b] \times [c, d]$  は点列コンパクトである。
- ③  $\mathbb{R}^2$  で、円板は点列コンパクトである。
- ④  $\mathbb{R}^2$  で、閉曲線は点列コンパクトである。



# 関数の極限

## 定義

距離空間  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  の間に写像  $f: X \rightarrow Y$  があって、次を満たすとき、 $f$  は  $x$  が  $x_0 \in X$  に近づいた時  $f(x)$  は  $y_0 \in Y$  に収束すると言ひ、 $y_0$  を  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  と書く。

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 f(U_\delta(x_0) - \{x_0\}) \subset U_\varepsilon(y_0)$$

# 連続写像

## 定義

距離空間  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  の間に写像  $f: X \rightarrow Y$  は、次を満たすとき、 $f$  は  $x_0 \in X$  で連続であると言う。

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 f(U_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(f(x_0))$$

また、任意の  $x \in X$  について、 $f$  が  $x$  で連続であるとき、 $f$  を連続写像という。

## 注

$f(x)$  が  $x = x_0$  で連続であるとは、 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  となることである。

# 諸性質

## 定理

点列コンパクトな距離空間の連続写像による像は点列コンパクトである。

## 定理 (最大値原理)

コンパクト集合上の連続関数は、最大値を持つ。

## 定理 (中間値の定理)

連続写像  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  について、 $f(0) < 0 < f(1)$  あるいは、 $f(0) > 0 > f(1)$  であるなら、 $0 \in f([0, 1])$  である。

# 同相

## 定義

距離空間の  $X, Y$  の間に連続写像  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$  があって、 $f \circ g = 1_Y, g \circ f = 1_X$  となるとき、 $X, Y$  は同相であると言い、 $X \cong Y$  と書く。またこのとき、 $f, g$  を同相写像と言う。

## 注

位相幾何学は、同相で不変な性質を研究の対象とする。  
 $X$  と  $Y$  が同相なら、 $X$  のオイラー数と  $Y$  のオイラー数は等しい。オイラー数は「位相不変量」である。

# 同相に関する例

## 例

- ①  $\mathbb{R}^1$  と  $S^1 - \{*\}$  は同相である。
- ②  $\mathbb{R}^2$  と  $S^2 - \{*\}$  は同相である。
- ③ 正方形 (内部を含む) と  $D^2$  は同相である。
- ④  $\mathbb{R}$  と  $\mathbb{R}^2$  は同相でない。
- ⑤  $\mathbb{R}^2$  と  $\mathbb{R}^3$  は同相でない。
- ⑥ メビウスの帯と単なる帯は同相でない。
- ⑦ 开区間  $(a, b)$  と 閉区間  $[a, b]$  は同相でない。
- ⑧ 球面とトーラス面は同相でない。

# ホモトピー

## 定義

$I = [0, 1]$  とする。

距離空間の  $X, Y$  の間に連続写像  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  があるとき、連続写像  $F : X \times I \rightarrow Y$  が存在して

$F(x, 0) = f_0(x), F(x, 1) = f_1(x)$  を満たすならば、 $f_0, f_1$  はホモトピック (ホモトープ) であると言い、 $f_0 \simeq f_1$  と書く。また、 $F$  を  $f_0$  と  $f_1$  をつなぐホモトピーと言う。

## 定理

ホモトピックであるという性質は同値関係である。すなわち次が言える。

- ①  $f_0 \simeq f_0$  である。(反射律)
- ②  $f_0 \simeq f_1$  ならば  $f_1 \simeq f_0$  である。(交代律)
- ③  $f_0 \simeq f_1$  かつ  $f_1 \simeq f_2$  ならば  $f_0 \simeq f_2$  である。(推移律)

# ホモトピー同値

## 定義

距離空間の  $X, Y$  の間に連続写像  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$  があって、 $f \circ g \simeq 1_Y, g \circ f \simeq 1_X$  となるとき、 $X, Y$  はホモトピー同値であると言い、 $X \simeq Y$  と書く。またこのとき、 $f, g$  をホモトピー同値写像と言う。

## 注

位相幾何学は、ホモトピー同値で不変な性質も研究の対象とする。

$X$  と  $Y$  がホモトピー同値なら、 $X$  のオイラー数と  $Y$  のオイラー数は等しい。オイラー数は「ホモトピー不変な量」である。

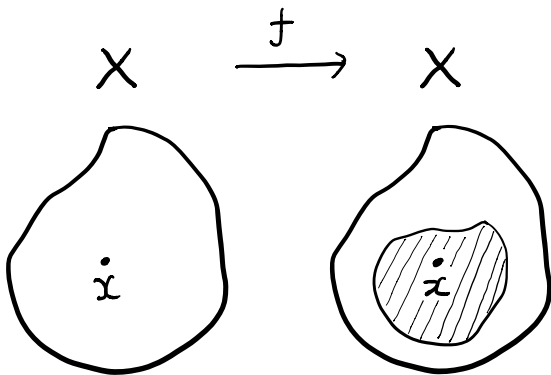
## ホモトピー同値に関する例

- ① 同相ならホモトピー同値である。
- ②  $D^2$  と一点  $\{*\}$  はホモトピー同値である。
- ③  $S^1$  と 区間  $I$  はホモトピー同値でない。
- ④ 开区間  $(a, b)$  と 閉区間  $[a, b]$  はホモトピー同値である。
- ⑤ 球面とトーラス面はホモトピー同値でない。



## 07 不動点定理

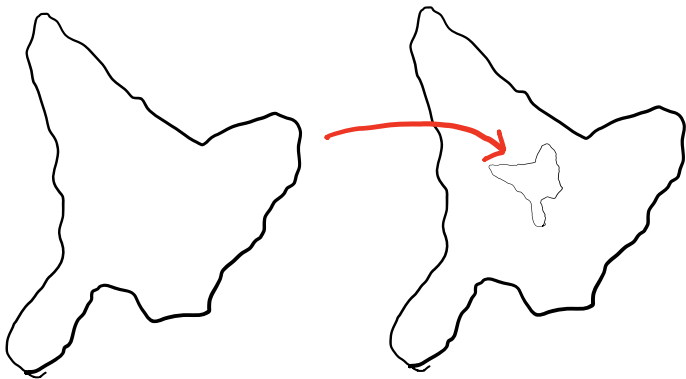
# 不動点定理



変換  $f: X \rightarrow X$  に対して  $f(x) = x$  となる点  $x \in X$  を  $f$  の不動点という。

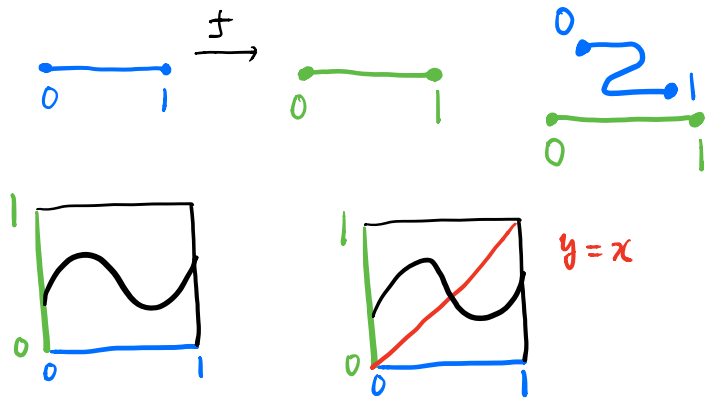
「どんな変換に対しても不動点が存在する」という定理を  $X$  に関する不動点定理という。

# 長岡市の不動点定理

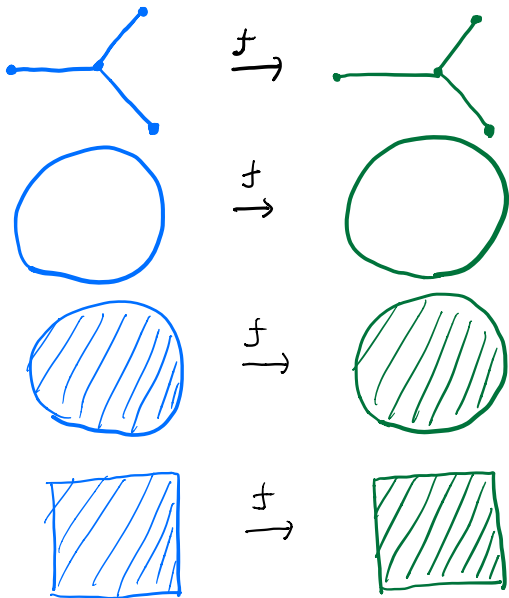


# 区間の不動点定理

$X = [0, 1]$  に関する不動点定理



# 様々な空間に対する不動点定理



## 不動点定理の例

【不動点定理が成り立つ空間】 線分、ツリー、円盤、正方形、長方形、球体、球面 ( $\sim id$ )、...

【不動点定理が成り立たない空間】 円周、正方形の周、トーラス、ソリッドトーラス、...

空間  $X$  について不動点定理が成り立てば、 $X$  と同相な空間  $Y$  についても不動点定理が成り立つ。

不動点定理と  $\chi$  には密接な関係がある。

不動点であることはローカルな性質であるが、不動点定理が成り立つことは空間のグローバルな性質である。

ある種の「存在」が不動点定理の成立で保証される(場合がある)。

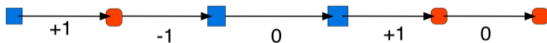
## 08 1次元の原の定理



# 赤あげて … 白さげないで … 赤あげない



レバーを上げることを1点で数え、レバーを下げることを-1点で数え、合計点を計算する。もし最初消灯していて、最後に点灯しているなら、その合計点は1である。



# 1次元版の原の定理



図 1

図 1 のように、線分  $AB$  があり、 $A$  から  $B$  に矢印が書かれている。その中がさらに小さい線分に分割されている。また、各頂点は、青 ■、赤 ● のいずれかで塗られている。この時、線分の端点の配色から決る  $X$  と、線分全体の頂点の配色から決る数  $Y$  を、以下のように定義する。



図 2

線分の端点の色に従って、図 2 の採点方法を基準に線分の両端を採点する。すなわち、矢印の先の赤の得点を  $+1$ 、矢印の元 A の赤を  $-1$  とし、両端の得点の和を  $X_0$  と定義する。図 1 の線分 AB の場合、 $X_0 = 1$  である。



図 1



図 3

線分 **AB** を分割する小さい線分で、端点が2つの色を持つものは、2つのパターンがある。それを、図3の採点方法を基準に点数を書き、その総和を  $Y$  とする。ただし、小さい線分の両端点と同色ならば、0点とする。  
 図1 線分 **AB** の場合、 $Y = 1$  である。

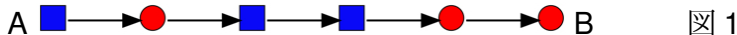


図 1

一般の分割された線分の配色について、次が定理が成り立つ。

# 1次元版原の定理

定理 (1次元における原の定理)

$$X_0 = Y$$

**[証明]** 点が  $k+1$  個あるとし、 $i$  番目の点が赤なら  $x_i = 1$ 、青なら  $x_i = 0$  と定義する。すると、点 **A** の得点は  $-x_0$ 、端点 **B** の得点は  $x_k$  である。よって、 $X_0 = x_k - x_0$  である。一方、 $i$  番目の線分の得点は  $x_{i+1} - x_i$  である。よって、

$$Y = \sum_{i=0}^{k-1} (x_{i+1} - x_i) = x_k - x_0。以上より Y = X_0 が言える。□$$

注

この定理には沢山の証明方法があるが、この方法は微積分の基本定理  $\int_0^k f'(x) dx = f(k) - f(0)$  を想起させる。

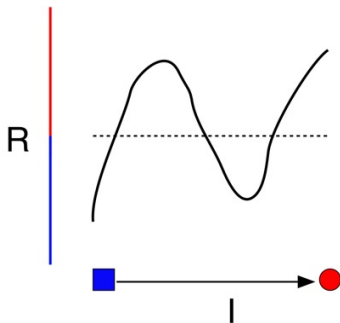
# 1次元の中間値の定理

## 定理 (1次元の中間値の定理)

$I = [0, 1]$  を区間、 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  を連続関数とする。

もし、 $f(0)$  と  $f(1)$  の符号が異なるなら、 $f$  の像は  $0$  を含む。

$y = f(x)$  のグラフ



## 1次元の中間値の定理の証明

$I$  を、長さを  $\frac{1}{n}$  にした小線分に細分する。分割点には、 $f$  で送られる値が正なら赤、負なら青、0なら赤青適当に、2つの色を塗る。仮定より  $I$  の端点  $0, 1$  では色が異なる。よって、この配色の  $X_0$  は  $1$  または  $-1$  である。よって、 $Y \neq 0$  なので、「原の定理」により、ある小さい線分  $P_n Q_n$  で、2頂点の色が2色であるものがある。 $I$  はコンパクトなので、 $n$  を増やしていく時、 $P_n$  の部分列で、ある点  $P$  に収束するものがある。それを改めて  $P_n$ 、それを頂点とする線分を  $P_n Q_n$  と書く。この時、 $Q_n$  も  $P$  に収束する。よって、 $P$  を  $f$  で送った像は、 $0$  以上  $0$  以下なので、 $0$  である。

# 1次元の Brouwer の不動点定理の証明

定理 (1次元の Brouwer の不動点定理)

連続写像  $f : I \rightarrow I$  には、不動点が存在する。

**[証明]** 任意の  $x$  に対して  $f(x) \neq x$  として矛盾を導く。写像  $g(x) = x - f(x)$  とすると、これは  $I$  から  $\mathbb{R}$  への連続写像であり、 $g(0) < 0$ ,  $g(1) > 0$  である。よって中間値の定理より、 $g(x) = 0$  となる  $x$  が存在することになり、矛盾。□



## 09 原の定理

## 2次元版

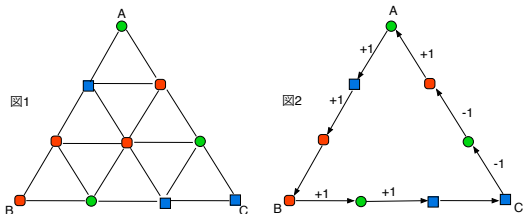


図1のように、三角形  $ABC$  があり、その中がさらに小さい三角形に分割されている。また、各頂点は、緑 ●、青 ■、赤 ● のいずれかで塗られている。この時、三角形の外周の頂点の配色から決る  $X_{01}$ ,  $X_{12}$ ,  $X_{20}$  と、三角形全体の頂点の配色から決る数  $Y$  を、次のように定義する。(今後、● = 0、■ = 1、● = 2 のように色を数字で表したり、配色を「付番」と呼んだりもする。)

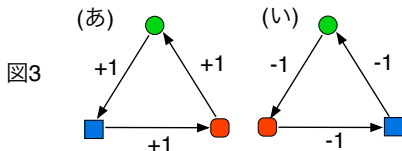


図2のように、分割された三角形 **ABC** の外周の小さい辺に左回りの矢印を書き、矢印の両端の色に従って、図3の(あ)、(い)の採点方法を適用する。例えば、(最初は  $X_{01} = X_{12} = X_{02} = 0$  としておいて)、図1の外周で、緑から青への矢印があれば、 $X_{01}$  を +1 し、青から緑への矢印があれば、 $X_{01}$  を -1 する。ただし、矢印の両端が同色ならば、0点とする。このように得られた得点の総和をこの図1の三角形の  $X_{01}$ ,  $X_{12}$ ,  $X_{20}$  と定義する。

図1の三角形 **ABC** では、図2より、 $X_{01} = X_{12} = X_{20} = 1$  である。

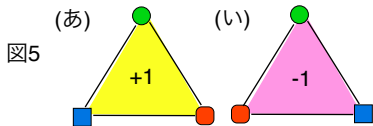
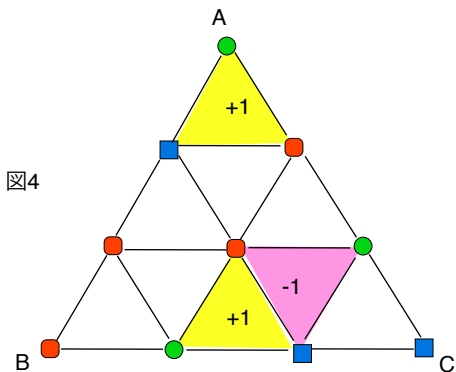
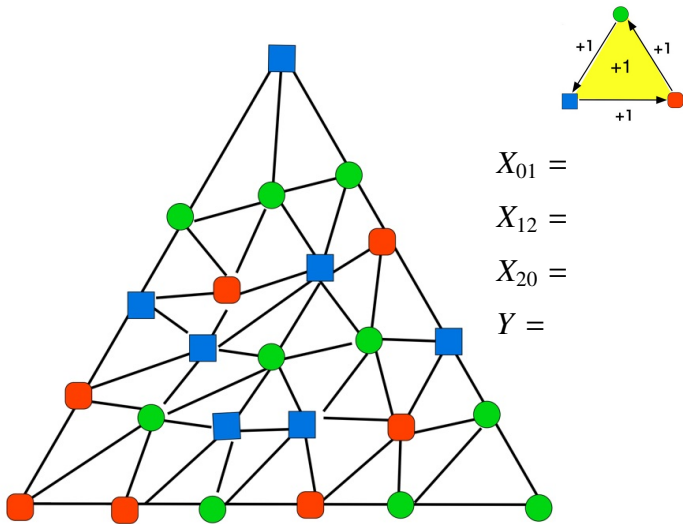


図4のように、三角形ABCを分割する小さい三角形で、頂点が3つの色を持つものは、回転したものを同じと思うと2つのパターンがある。それを、図5の(あ)、(い)の採点方法を基準に点数を書き、その総和をYとする。ただし、三角形の2頂点または3頂点が同色ならば、0点とする。この三角形ABCの場合、 $Y = 1$ である。

# 2次元版



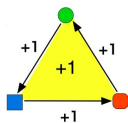
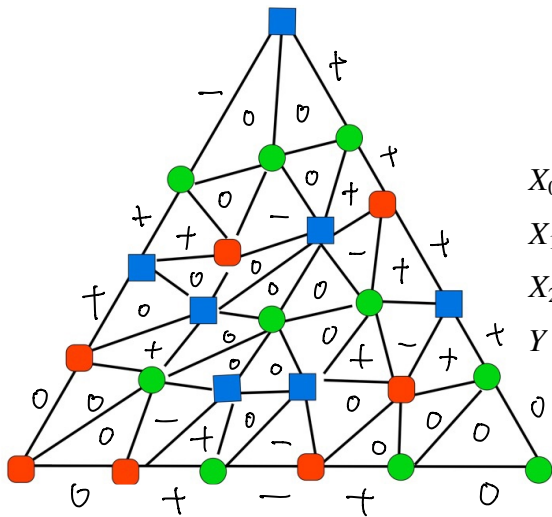
$$X_{01} =$$

$$X_{12} =$$

$$X_{20} =$$

$$Y =$$

# 2次元版



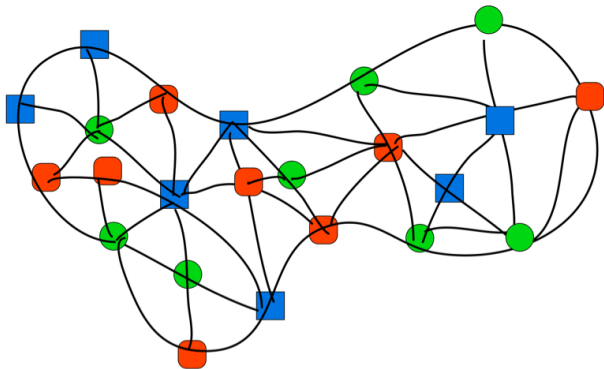
$$X_{01} = 3 - 1 = 2$$

$$X_{12} = 2 - 0 = 2$$

$$X_{20} = 3 - 1 = 2$$

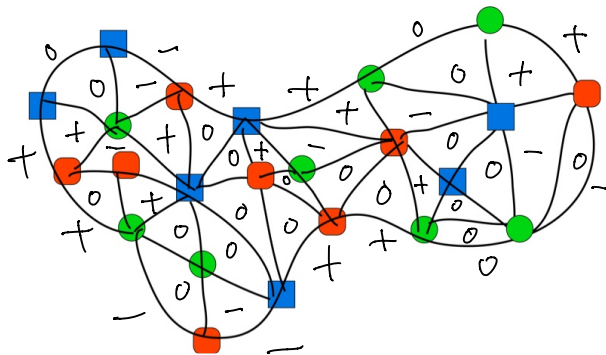
$$Y = 2$$

# 「空間」の性質として…



$X_{01}$	$X_{12}$	$X_{20}$	$Y$

# 「空間」の性質として…



$X_{01}$	$X_{12}$	$X_{20}$	$Y$
3	3	3	3



## 定理 (原の定理)

$X_{01}$ ,  $X_{12}$ ,  $X_{20}$  はすべて等しい。

この等しい値を  $\deg X$  と書くと、次が成り立つ。

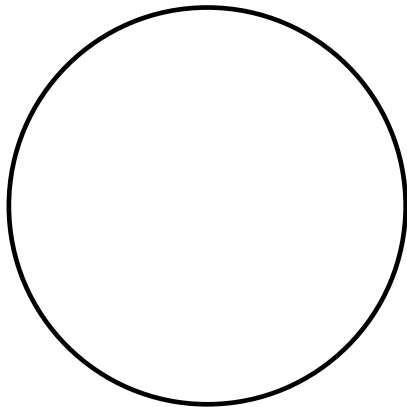
$$\deg X = Y$$

証明は後で行う。

## 定義

$\deg X$  をこの多角形の周囲の付番 (配色) $X$  で決められた「次数」と呼ぶ。

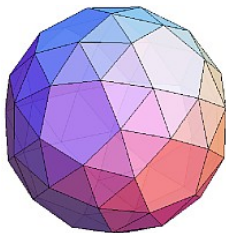
# 演習問題



$X_{01}$	$X_{12}$	$X_{20}$	$Y$

## 原の定理 (2012)

$n$  次元の多角形で同様な定理が成立する。



$$\sum_{\partial M} \varphi = \sum_M \Delta \varphi$$

(参考 : Stokes の定理)

$$\int_{\partial M} \varphi = \int_M d\varphi$$

# 10 証明

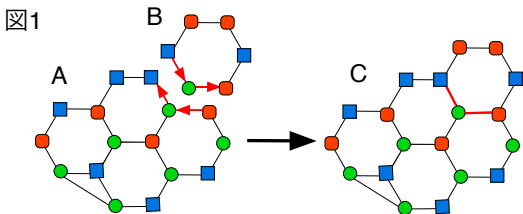
## 補題

原の定理の証明の前に、次の定理を証明する。

### 補題

ある多角形があり、その中が幾つかの多角形に分割されていて、各頂点には3つの色が塗られているとする。このとき、元の多角形の  $X_{ij}$  は、それを分割した多角形の  $X_{ij}$  の総和である。

【証明】まず、多角形Cを2つの多角形A、Bに分割したとき、Aの  $X_{ij}$  と、Bの  $X_{ij}$  の和は、Cの  $X_{ij}$  に等しいことを示す。



## 補題の証明

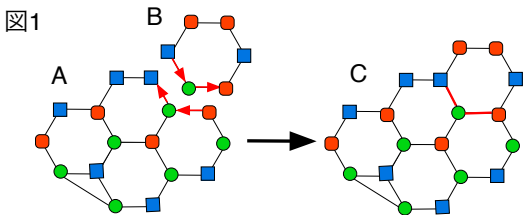


図1のようにAとBを2辺で接着してCを作る時、その接合される辺では、それぞれの $X_{ij}$ に寄与する色が、それぞれの左回りの矢印の順で正反対である。一方、辺の点数の採点方法を見ると、逆順の色に対しては、符号が逆になる。したがって、新しくできたCの $X_{ij}$ は、AとBの $X_{ij}$ の和に等しい。

2辺での接着だけでなく、1辺、3辺以上の接着や、辺を共有しない場合などについても、Cに対して定理は成り立つ。

同様に、複数の多角形を張り合わせた場合も定理は成り立つので、いつも定理は正しい。(証明終)

# 証明

定理の証明をする。採点の仕方を見れば、分割されていない三角形については、 $X_{ij} = Y$  の関係があるのは明らか。

一方、三角形 **ABC** の  $X_{ij}$ 、 $Y$  を考える。また、分割された小さな三角形の  $X_{ij}$  を  $X'_{ij}$ 、 $X''_{ij}$ 、 $\dots$ 、 $Y$  を  $Y'$ 、 $Y''$ 、 $\dots$  とする。定理より、 $X_{ij} = X'_{ij} + X''_{ij} + \dots$  であるが、それぞれの小さい三角形については、分割されていないので、 $X'_{ij} = Y'$ 、 $X''_{ij} = Y''$ 、 $\dots$  が成り立っている。よって、 $X_{ij} = Y' + Y'' + \dots = Y$  となり、定理は証明された。

# 11 応用



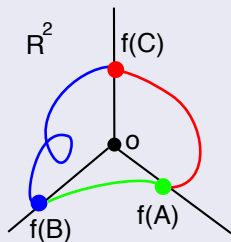
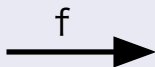
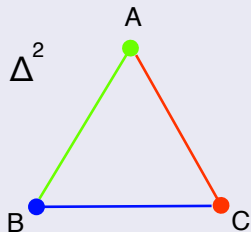
- ① 多次元の間値の定理
- ② 不動点定理
- ③ Hex ゲーム
- ④ Tucker の補題
- ⑤ Borsuk-Ulam の一致点定理
- ⑥ 対心点定理
- ⑦ ホットケーキ分割定理
- ⑧ ハムサンドイッチ定理

## 2次元の中間値の定理

### 定理 (2次元の中間値の定理)

$\Delta^2$  を (中身のある) 三角形、 $f: \Delta^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を連続写像とする。 $\mathbb{R}^2$  を、原点を始点とする 3本の半直線で 3つの領域に分ける。

この時、 $\Delta^2$  の各辺が、 $f$  でそれぞれ 1つずつ異なる領域に (境界も許す) 送られるなら、 $f$  の像は原点を含む。



## 2次元の中間値の定理の証明

$\Delta^2$  の各辺を、長さを  $\frac{1}{n}$  にしたメッシュに切って小三角形に細分する。各頂点には、 $f$  で送られる 3 つの領域に応じて 3 つの色のいずれかに塗る (境界あるいは原点に送られた色は適当)。 $\Delta^2$  の外周の 3 つの辺の頂点は 3 回色が変わり、他は同一色が並ぶので、この配色  $X$  に対する次数  $\deg X$  は 1 または  $-1$  である。よって、「定理」により、ある小三角形  $P_n Q_n R_n$  で、頂点の色が 3 色であるものがある。 $\Delta^2$  はコンパクトなので、 $P_n$  の部分列で、ある点  $P$  に収束するものがある。それを改めて  $P_n$ 、それを頂点とする三角形を  $P_n Q_n R_n$  と書く。この時、 $Q_n, R_n$  も  $P$  に収束する。よって、 $P$  を  $f$  で送った像は、3 つの領域の閉包の共通部分、すなわち原点である。

## 2次元の Brouwer の定理の証明

定理 (2次元の Brouwer の不動点定理)

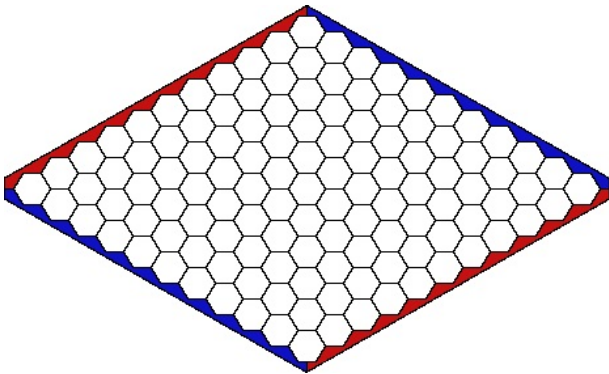
連続写像  $f : \Delta^2 \rightarrow \Delta^2$  には、不動点が存在する。

**[証明]** 任意の  $x$  に対して  $f(x) \neq x$ 、として矛盾を導く。 $\Delta^2$  を三角形 **ABC** とする。原点  $O$  を  $\Delta^2$  の内点に取り、 $OA$ 、 $OB$ 、 $OC$  を「半直線」とする。写像  $g(x)$  を「 $f(x)$  から  $x$  へ伸ばした直線と三角形 **ABC** の周との交点」とすると、これは連続関数であり、 $AB$ 、 $BC$ 、 $CA$  上の点を固定する。よって、中間値の定理より、 $g(x) = O$  となる  $x$  が三角形 **ABC** に存在することになり、矛盾。□

# Hex ゲーム

定理 (Hex ゲームの引き分けなし定理)

Hex ゲームには、引き分けがない。



## Hex ゲーム

**[証明]** 各六角形の中心を線分で結び双対グラフを作ると、菱形の三角形分割ができる。ゲームの終了後、左下と右上、左上と右下が連結されていないとして、矛盾を導く。左下の線分上の頂点とその連結成分の頂点を青に、右下の線分上の頂点とその連結成分の頂点を赤に、その他を緑に塗る。この時、菱形の周の配色  $X$  に対する次数  $\deg X$  は 1 なので、内部に少なくとも一つ頂点が三色で塗られた三角形が存在するが、緑は青とも赤とも隣接しないはずなので、矛盾である。□

# Tucker の補題

## 定義 (対心的)

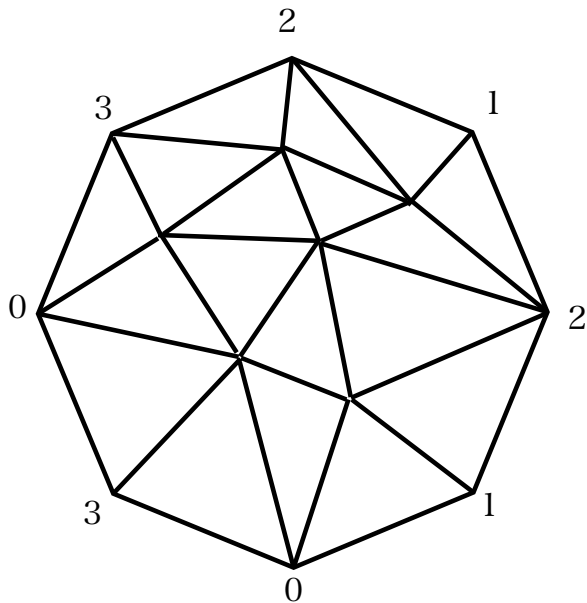
正  $2n$  角形の各頂点が、0, 1, 2, 3 の4つの番号のどれかが振られ、次の条件を満たしているとき、この付番は対心的であると言う。

$2n$  角形の中心について対称な位置にある2頂点は、一方が0でもう一方が2であるか、一方が1でもう一方が3である。

## 定理 (Tucker の補題)

正  $2n$  角形の各頂点が、0, 1, 2, 3 の4つの番号で対心的に振られていて、 $2n$  角形の内部も三角形分割され、各頂点はその4つの番号のどれかが振られているなら、端点が、0と2であるか、1と3である線分が存在する。

# Tucker の補題





# 連続符番の次数

## 定義 (符番の連続性)

$k \geq 3$  を自然数とする。多角形の周において、各頂点に  $\{0, 1, 2, \dots, k-1\}$  のいずれかの数字が割り振られたとする。この付番を  $X$  と書く。 $X$  が次の条件を満たしているとき、 $X$  は連続的符番であると言う。

各辺の端点の数字は同じ番号か 1 つ違いである。  
(ただし、 $0$  と  $k-1$  も一つ違いと考える。)

## 定理 (連続的符番に対する次数の定義可能性定理)

多角形の周の連続的符番  $X$  について、「採点」 $X_{ij}$  を端点の数字が  $i, j$  である辺の (周の向きで符号を考えた) 数であるとすると、次が成り立つ。

$$X_{01}, X_{12}, X_{23}, \dots, X_{(k-1)0} \text{ はすべて等しい。}$$

この値を連続的符番  $X$  の次数と言い、 $\deg X$  と書く。

## 連続的符番に対する次数の定義可能性定理の証明

【証明】 付番  $X$  の 3 以上の数字を全て 2 にした付番を  $X'$  とし、その「採点」  $X'_{ij}$  を考える。まず、0, 1 に変化はないので、

$$X_{01} = X'_{01} \quad (1)$$

原の定理より、

$$X'_{01} = X'_{12} \quad (2)$$

更に、 $X$  は連続なので、1 と隣接する  $k$  は、0, 1, 2 のみなので、

$$X'_{12} = X_{12} \quad (3)$$

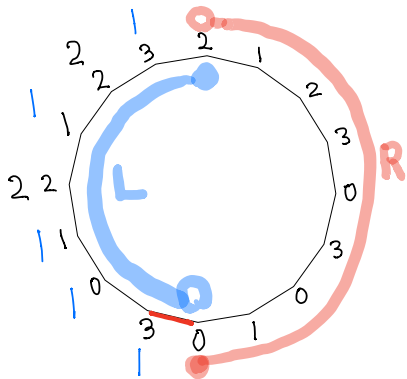
(1), (2), (3) より、 $X_{01} = X_{12}$ 。同様にして全ての  $X_{i(i+1)}$  は等しい。 ( $(k-1)+1=0$  と考えている。)

# 対心的付番の次数の非自明性定理

## 定理 (対心的付番の次数の非自明性定理)

$2n$  角形の付番  $X \in \{0, 1, 2, 3\}$  が対心的であるとする。周において 0 と 2 あるいは 1 と 3 は隣接していないとすると、周の付番  $X$  は連続的であり、その次数  $\deg X$  は奇数である。

【証明】  $X$  が連続的であるのは明らか。対称点として 0 と 2 があるとしてよい。それぞれを端点とする辺で、半分に切って  $X_{ij}$  を右側  $R$  と左側  $L$  に分けると (0 は  $R$ 、2 は  $L$  に入れる)、 $X_{01} = X_{01}^R + X_{01}^L$ 。付番が対心的なので、 $X_{01}^L = X_{23}^R$ 。よって、 $X_{01} = X_{01}^R + X_{23}^R \cdots (*)$ 。さて、 $L$  側の 0 と 3 を 1 に置き換えた付番  $X'$  を考える。 $LR$  の境目の 0 の  $L$  側の隣は 1 であり  $L$  側には 0 が無いので  $X_{01}^R = X'_{01} \pm 1$  である ( $\pm$  は 0, 2 の並び方の向きによる。次ページ図では  $-1$ )。前定理より  $X'_{01} = X'_{23}$  なので、 $X_{01}^R = X'_{23} \pm 1$  である。更に、 $L$  側に 3 が無いので  $X'_{23} = X_{23}^R$ 。よって、 $X_{01}^R = X_{23}^R \pm 1$  である。よって、 $(*)$  より  $X_{01} = 2X_{23}^R \pm 1 = \text{奇数}$  である。



$$\begin{aligned}
 X_{01} &= X_{01}^R + X_{01}^L \\
 &= X_{01}^R + X_{23}^R \\
 &= X'_{01} \pm 1 + X_{23}^R \\
 &= X'_{23} \pm 1 + X_{23}^R \\
 &= 2X_{23}^R \pm 1
 \end{aligned}$$

## Tucker の補題の証明

【Tucker の補題の証明】周において付番  $X$  は対心的である。周において 0 と 2、1 と 3 が隣接しているならば結論は正しい。周において 0 と 2、1 と 3 が隣接していないとする。このとき前定理より  $X$  は連続的で  $\deg X$  は奇数である。3 を全て 2 に置き換えた付番を  $X'$  とすると、 $\deg X' = X'_{01} = X_{01} = \deg X$  は奇数であり 0 でない。よって置き換え後は、元の定理より、内部に 0, 1, 2 を頂点とする三角形がある。この 2 が元々 2 だったすると、置き換え前に 0-2 という線分があった事になり、元々 3 だったとすると、1-3 という線分があった事になる。いずれにしても結論は正しい。

# 「対心点定理」

## 定理 (「対心点定理」)

原点を中心とする半径1の球面を  $S^2$  とする。任意の連続写像  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  について任意の  $x \in S^2$  について、 $f(-x) = -f(x)$  が成り立つなら、原点  $O$  は  $f$  の像に含まれる。

## 注

これは、中間値の定理のバリエーションである。

## 「対心点定理」の証明

[証明]  $S^2$  を赤道で切り、上半球面を考え、赤道を中心対称に点を置いて何本かの線分に分割する。また更に上半球面に点を加えて三角形分割する。各点には、 $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$  に応じて次の規則で色 0, 1, 2, 3 をつける。

$$0: f_1(x) \geq 0, f_2(x) \geq 0, \quad 2: f_1(x) \leq 0, f_2(x) \leq 0$$

$$1: f_1(x) \leq 0, f_2(x) \geq 0, \quad 3: f_1(x) \geq 0, f_2(x) \leq 0$$

ただし、複数の条件を同時に満たす場合は、その条件に当てはまるいずれの色であってよい。

すると、Tucker の補題より、ある両端の点を  $P, Q$  とする線分で色が 0, 2 あるいは 1, 3 であるものが存在する。

三角形分割を細かくすると、両端が 0, 2 である  $P, Q$  の収束列が得られるかまたは、両端が 1, 3 である  $P, Q$  の収束列が得られる。その極限值は原点である。□

# Borsuk-Ulam の一致点定理

## 定理 (Borsuk-Ulam の一致点定理)

原点を中心とする半径1の球面を  $S^2$  とする。任意の連続写像  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  についてある点  $x \in S^2$  が存在して、 $f(x) = f(-x)$  となる。

**【証明】**  $g(x) = f(x) - f(-x)$  と置くことにより、「対心点定理」に帰着される。□



# ホットケーキ分割定理

## 定理 (ホットケーキ分割定理)

平面内の2つの面積を持つ領域は、1つの直線によって、同時に2等分できる。

# ハムサンドイッチ定理

## 定理 (ハムサンドイッチ定理)

空間内の3つの体積を持つ領域は、1つの平面によって、同時に等分できる。

## 12 現代数学

- ① テーマの変遷  
ものの性質  $\rightarrow$  空間の構造
- ② 定理の形式

$$\int \text{量} = \text{一定}$$

$$\int \text{ローカルな量} = \text{グローバルな量}$$

$$\int \text{解析的な量} = \text{幾何的・代数的な量}$$

$$\int_{\text{全体}} \text{量の微分} = \int_{\text{境界}} \text{量}$$

## 他の話

- ① 公理主義
- ② 高次元化
- ③ 例えば「理論」の空間化

「トポロジーは応用できるか？」

[https://mathsoc.jp/publication/tushin/1604/  
1604tamaki.pdf](https://mathsoc.jp/publication/tushin/1604/1604tamaki.pdf)